

aggiornamento
luglio 2014

Problemi, Quesiti e Soluzioni di Esami di Stato di Liceo Scientifico

(2010-2014 PNI)

da Zanichelli-MATUTOR®

www.cm-physmath.net

CM_Portable MATH Notebook Series™





Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

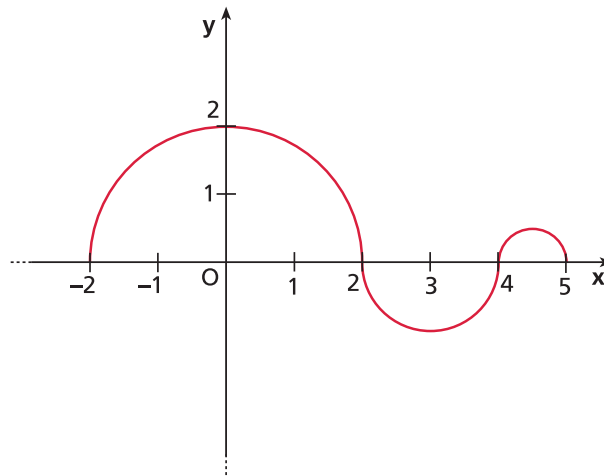
A. S. 2009-2010

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leq x \leq 5$ essendo g la derivata di una funzione f . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(\frac{9}{2}; 0)$ e raggi rispettivi 2 , 1 , $\frac{1}{2}$.



- a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?
- b) Per quali valori di x , $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- c) Se $f(x) = \int_{-2}^x g(t)dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.
- d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

- a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O .
- b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2} .
- c) Sia \mathbf{D} la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A . Si determini la retta r , parallela all'asse x , che stacca su \mathbf{D} il segmento di lunghezza massima.
- d) Si consideri il solido \mathbf{W} ottenuto dalla rotazione di \mathbf{D} intorno all'asse x . Se si taglia \mathbf{W} con piani ortogonali all'asse x , quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di \mathbf{W} .

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è

$$p^{(n)}(x) = n! a_n$$

dove a_n è il coefficiente di x^n .

2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1.$$

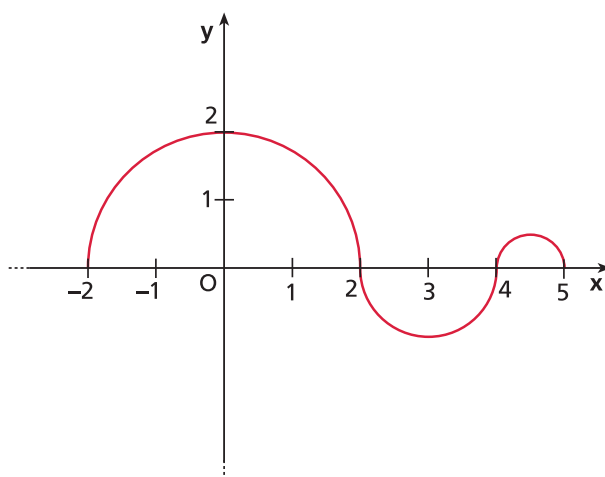
Come si può essere certi che esiste un unico zero?

5. Sia G il grafico di una funzione $x \rightarrow f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.
6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3 \cos t; 2 \sin t)$ al variare di t , $0 \leq t \leq 2\pi$.
7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. L'integrale $\int_0^4 2\pi x (\sqrt{x}) dx$ fornisce il volume del solido:
- a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x ;
 - b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y ;
 - c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio \sqrt{x} ;
 - d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2010

a)



La funzione $g(x)$ è individuata da

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{1 - (x - 3)^2} & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2} & \text{se } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

cioè

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{-x^2 + 6x - 8} & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ \sqrt{-x^2 + 9x - 20} & \text{se } 4 < x \leq 5 \end{cases} .$$

Per stabilire i punti di non derivabilità calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } -2 < x < 2 \\ \frac{x-3}{\sqrt{1-(x-3)^2}} & \text{se } 2 < x < 4 \\ -\frac{x-\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2}} & \text{se } 4 < x < 5 \end{cases} .$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty .$$

La funzione $g(x)$ non è derivabile in $x = -2$.

Analogamente la funzione $g(x)$ non è derivabile in

$$x = 2, \quad x = 4, \quad x = 5$$

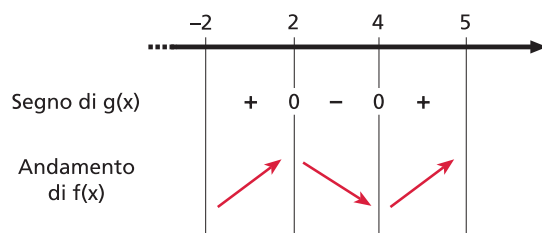
perché

$$\lim_{x \rightarrow 2} g'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4} g'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} g'(x) = -\infty .$$

b) Dato che $g(x)$ è la derivata di $f(x)$, i punti di massimo o minimo di quest'ultima sono individuati da quei punti di intersezione tra $y = g(x)$ e l'asse delle ascisse in cui $g(x)$ cambia di segno. Essi sono

$$x = 2, \quad x = 4 .$$

In particolare, poiché $g(x)$ è positiva in un intorno sinistro sufficientemente piccolo di $x = 2$ e negativa in un suo intorno destro, allora $x = 2$ è un massimo per $f(x)$.



Viceversa $x = 4$ è un minimo per $f(x)$.

c)

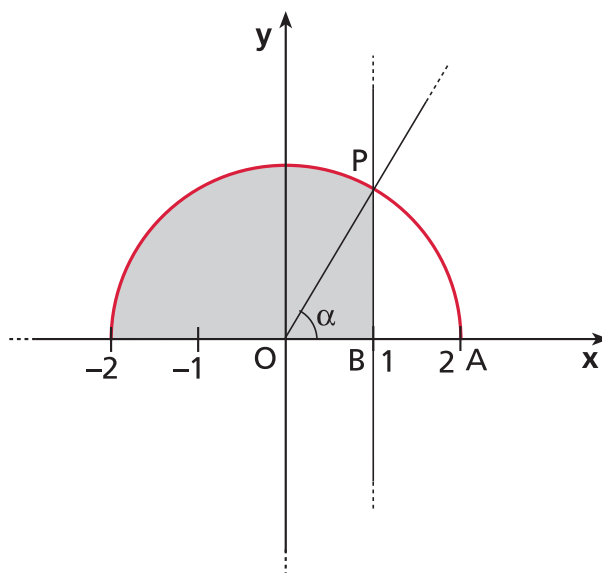
$$f(4) = \int_{-2}^4 g(t) dt$$

Tale integrale corrisponde alla somma algebrica tra le aree delle due semicirconferenze con centri $C_1(0; 0)$ e raggio 2 e $C_2(3; 0)$ e raggio 1:

$$f(4) = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$f(1) = \int_{-2}^4 g(t) dt.$$

Tale integrale corrisponde all'area indicata in figura



Essa è uguale alla differenza tra l'area della semicirconferenza (che vale 2π) e l'area del triangolo mistilineo APB ; quest'ultima è pari all'area del settore circolare AOP meno l'area del triangolo OBP .

Innanzitutto $P(1; \sqrt{3})$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$\mathcal{A}(\widehat{APB}) = \frac{1}{3} \cdot 2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Infine

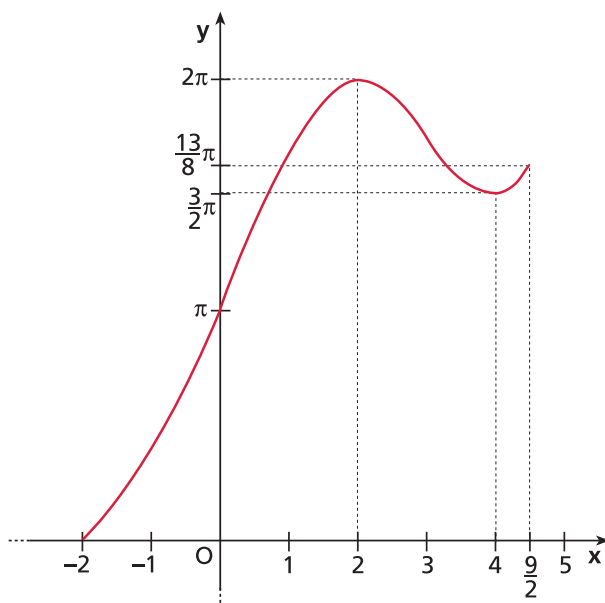
$$f(1) = 2\pi - \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) I punti in cui $f(x)$ ha derivata seconda nulla sono i punti critici di $g(x)$:

$$x = 0 \quad x = 3 \quad x = \frac{9}{2}.$$

In generale, non si può dedurre il segno di una funzione dalla conoscenza della sua derivata, poiché le primitive di una stessa funzione differiscono per una costante. Se invece assumiamo $f(x)$ come al punto c), allora osserviamo che $f(x) \geq 0$ in $[-2; 5]$ poiché per $-2 \leq x \leq 5$, $f(x)$ corrisponde all'area sottesa al grafico di $g(x)$. In particolare:

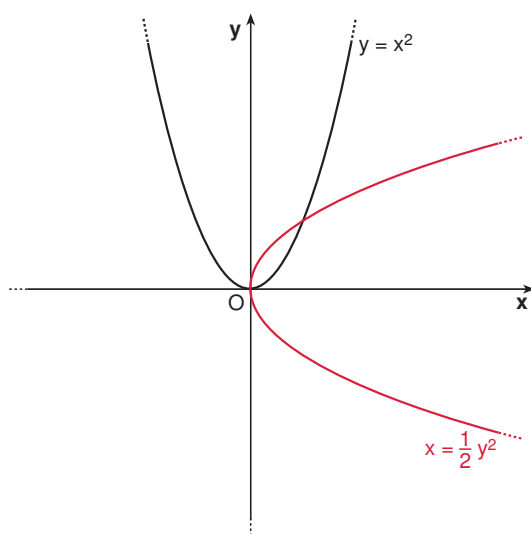
- $f(-2) = 0$
- $f(1) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $f(2) = 2\pi$
- $f(4) = \frac{3}{2}\pi$
- f è crescente per $-2 < x < 2 \vee 4 < x < 5$
- f ammette un massimo relativo in $x = 2$ e un minimo relativo in $x = 4$
- f è convessa per $-2 < x < 0 \vee 3 < x < \frac{9}{2}$
- f ammette flessi nei punti $x = 0$, $x = 3$ e $x = \frac{9}{2}$.



SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2010

- a) La parabola di equazione $y^2 = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}y^2$, ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle x , il vertice nell'origine O . Di conseguenza il fuoco ha coordinate $F_1\left(\frac{1-\Delta}{4a}; 0\right)$, cioè $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\frac{1}{2}$.

La parabola di equazione $y = x^2$ ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse y , il vertice nell'origine degli assi, il fuoco $F\left(0; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, ovvero $F_2\left(0; \frac{1}{4}\right)$. La direttrice è, quindi, per simmetria la retta $y = -\frac{1}{4}$.



Per determinare le coordinate del punto di intersezione A delle due parabole, risolviamo il sistema costituito dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = \frac{1}{2}x^4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(2 - x^3) = 0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

Troviamo, quindi, oltre all'origine, l'intersezione $A(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$.

- b) Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della *duplicazione del cubo* che consiste nella costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo l assegnato. Lo spigolo l' del cubo cercato è, perciò, tale che $l'^3 = 2l^3$, cioè $l' = \sqrt[3]{2} \cdot l$.

Il problema della duplicazione del cubo, assieme al problema della *trisezione dell'angolo* e a quello della *quadratura del cerchio*, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca, rilevanti in quanto non risolubili con riga e compasso.

Per approssimare il numero $\sqrt[3]{2}$, usiamo il metodo delle tangenti. Per far ciò pensiamo tale numero come l'unica radice della funzione $f(x) = x^3 - 2$. Tale funzione, nell'intervallo $[1, 2]$, è crescente e ha la concavità rivolta verso l'alto. Inoltre $f(2) > 0$.

Utilizzando la formula di ricorrenza compiliamo una tabella:

n	x_n	$f(x_n) = x^3 - 2$	$f'(x_n) = 3x^2$	$x_n - x_{n-1}$
0	2,000	6,000	12,000	
1	1,500	1,375	6,750	0,500
2	1,296	0,178	5,041	0,204
3	1,261	0,005	4,770	0,035
4	1,260			0,001

Il valore di $\sqrt[3]{2}$ approssimato a meno di 10^{-2} è, quindi,

$$\sqrt[3]{2} \simeq 1,26.$$

- c) Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = k$. Affinché intersechi la regione di piano D evidenziata in figura dobbiamo considerare $0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}$.

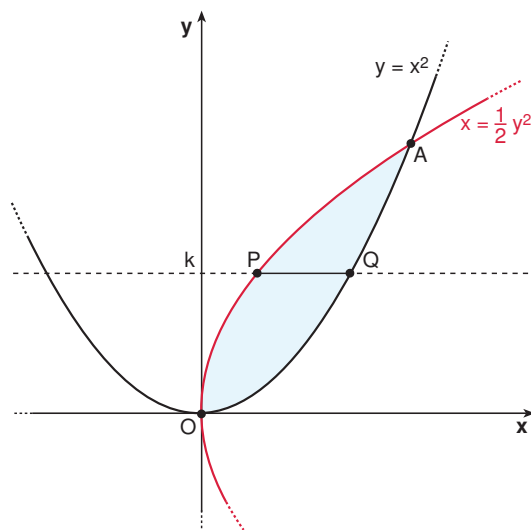
Chiamiamo P e Q le intersezioni della retta $y = k$ con le due parabole, come in figura. Ne segue che l'ascissa di P vale $x_P = \frac{1}{2}k^2$ e quella di Q vale $x_Q = \sqrt{k}$.

Di conseguenza, $\overline{PQ} = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2$. Occorre, quindi, calcolare il massimo della funzione

$$f(k) = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2,$$

nel dominio $[0; \sqrt[3]{4}]$. Per far ciò, calcoliamone la derivata agli estremi del dominio:

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k.$$



studiamo il segno della derivata:

$$f'(k) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad 1 - 2k\sqrt{k} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad k^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad k \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Il segmento di lunghezza massima si ottiene, quindi, in corrispondenza della retta $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

d) Se si taglia il solido W ottenuto dalla rotazione della regione D intorno all'asse x con un piano $x = h$ ortogonale all'asse x si possono le seguenti sezioni:

- per $h = 0$ si ottiene un punto;
- per $0 < h < \sqrt[3]{2}$ si ottiene una corona circolare;
- per $h = \sqrt[3]{2}$ si ottiene una circonferenza.

Il volume di W vale:

$$\begin{aligned} V_W &= \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x \, dx - \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 \, dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \\ &= \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5} \right) = \frac{3\sqrt[3]{4}}{5} \pi. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Data la funzione polinomiale $p(x)$ di grado n :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},$$

si calcoli la sua derivata prima, seconda, terza, ..., n -esima:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1;$$

$$p''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + a_2;$$

$$p'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + \cdots + a_3;$$

...

$$p^{(n)}(x) = [n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1] a_n = n! a_n.$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 2 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010</p>

Applichiamo il teorema delle tre perpendicolari. Se dal piede B della retta PB perpendicolare al piano ABC si manda la perpendicolare BA alla retta CA del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano di AB e PB , cioè ABP . Se ne deduce che AC è perpendicolare a tutte le rette del piano ABP passanti per A e in particolare è perpendicolare ad AP , quindi il triangolo PCA è rettangolo. Inoltre, poiché per ipotesi PB è perpendicolare al piano ABC , PB è perpendicolare ad AB e a CB , quindi i triangoli PAB e PAC sono rettangoli.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Data la funzione $y = e^x$, si prenda un punto generico $P(\bar{x}; e^{\bar{x}})$ appartenente al grafico.

L'equazione della retta passante per P e tangente alla curva ha forma:

$$y - e^{\bar{x}} = e^{\bar{x}}(x - \bar{x}) \rightarrow y = e^{\bar{x}}x + e^{\bar{x}} - \bar{x}e^{\bar{x}}.$$

Per identità con l'equazione $y = ax$ della retta r risulta:

$$\begin{cases} e^{\bar{x}} - \bar{x}e^{\bar{x}} = 0 \\ e^{\bar{x}} = a \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = 1 \\ a = e \end{cases}$$

Pertanto l'angolo γ che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse ha tangente goniometrica pari a

$$\operatorname{tg} \gamma = a = e \rightarrow \gamma = \operatorname{arctg} e \simeq 69^{\circ}48'.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Sia $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$: essa è una funzione continua di dominio \mathbb{R} .

Per accertarsi dell'esistenza di un unico zero, calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3x^2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2.$$

La derivata $f'(x)$ è positiva per ogni $x \neq 0$ e perciò $f(x)$ è monòtona crescente; in tali condizioni, il Primo teorema di unicità dello zero assicura l'esistenza di un unico zero in un intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso, se $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Calcoliamo $f(x)$ in alcuni valori:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1.$$

Quindi esiste un unico zero di $f(x)$ nell'intervallo $[0; 1]$; applichiamo il metodo di bisezione:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \frac{7}{8} \simeq -0,081 < 0 \text{ allora lo zero si trova in } \left[\frac{1}{2}; 1\right]; \\ f\left(\frac{3}{4}\right) &= \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 1 \simeq 0,33 > 0 \text{ allora lo zero si trova in } \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]; \\ f\left(\frac{5}{8}\right) &= \sqrt[3]{\frac{5}{8}} + \left(\frac{5}{8}\right)^3 - 1 \simeq 0,099 > 0 \text{ allora lo zero si trova in } \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right]; \\ f\left(\frac{9}{16}\right) &= \sqrt[3]{\frac{9}{16}} + \left(\frac{9}{16}\right)^3 - 1 \simeq 0,003 > 0. \end{aligned}$$

Lo zero approssimato a due cifre decimali della funzione è quindi $\frac{9}{16}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Le equazioni della simmetria rispetto all'asse $x = k$ sono:

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y. \end{cases}$$

Il grafico G è simmetrico rispetto all'asse $x = k$ se, ogni volta che contiene un punto $P(x; f(x))$, contiene il simmetrico di P rispetto a $x = k$, cioè il punto $P'(2k - x; f(x))$. Pertanto, G è simmetrico rispetto a $x = k$ se, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = f(2k - x).$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 6 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010</p>

Le equazioni parametriche del luogo geometrico sono:

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ricaviamo l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \cos t \\ \frac{y}{2} = \sin t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2}{9} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{4} = \sin^2 t \end{cases},$$

per l'identità fondamentale della goniometria risulta $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ e quindi:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Il luogo geometrico è quindi un'ellisse.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 7 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010</p>

Anna ha due figli, che chiameremo F_1 e F_2 . Poiché Anna è stata invitata alla festa, sappiamo che ci sono solo 3 possibilità, relativamente ai sessi di F_1 e F_2 :

- F_1 e F_2 sono entrambe femmine
- F_1 è maschio, F_2 è femmina
- F_1 è femmina, F_2 è maschio

Abbiamo quindi tre casi possibili equiprobabili dei quali solo il primo è favorevole. La probabilità cercata è

$$p = \frac{1}{3}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Una successione numerica si dice progressione aritmetica se la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante. Pertanto deve valere:

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2} \quad \text{con } n > 3 \text{ e naturale;}$$

ovvero:

$$2\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-3} = 0.$$

Applichiamo per ogni coefficiente binomiale la legge delle classi complementari,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}:$$

$$2\binom{n}{2} - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} = 0.$$

Sviluppiamo i coefficienti binomiali e risolviamo l'equazione in n .

$$2\frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} = 0$$

$$n(n-1) - n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} = 0$$

$$n(6n - 12 - n^2 + 3n - 2) = 0$$

$$n(n^2 - 9n + 14) = 0 \rightarrow$$

$$n_1 = 0 \text{ non accettabile}$$

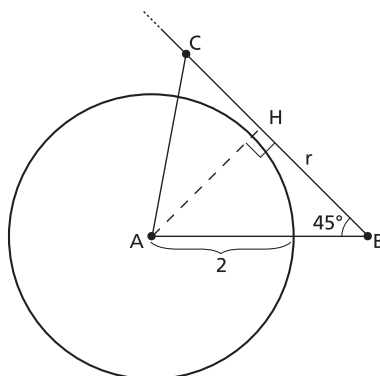
$$n_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow n_2 = 2 \vee n_3 = 7$$

Il valore $n = 2$ non è accettabile poiché $n > 3$.

Pertanto il valore di n per cui i coefficienti dati sono in progressione aritmetica è $n = 7$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

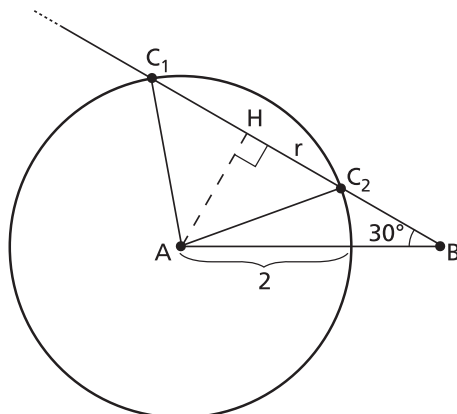
Consideriamo un segmento AB e un angolo di ampiezza 45° di vertice B , con un lato AB e il secondo lato la semiretta r . Al variare di C in r otteniamo tutti i possibili triangoli ABC con $\overline{AB} = 3$ e $\widehat{ABC} = 45^\circ$.



Osserviamo che il segmento AH distanza di A da r ha lunghezza pari a

$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Il lato AC deve essere maggiore di AH e quindi la sua lunghezza non può quindi essere uguale a 2, perché $\frac{3}{2}\sqrt{2} > 2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} > 4$.

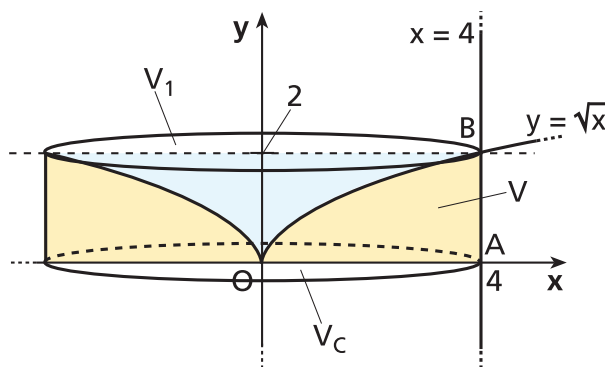
Se invece $\widehat{ABr} = 30^\circ$, la distanza \overline{AH} tra A ed r risulta pari a $\frac{3}{2}$, che è minore di 2. Esistono quindi due punti, C_1 e C_2 , simmetrici rispetto ad AH , tali che $\overline{AC_1} = \overline{AC_2} = 2$. Essi si ottengono dall'intersezione di r con la circonferenza di centro A e raggio 2.



SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

La risposta giusta è la b). Infatti, il volume del solido S generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse y può essere ottenuto nel seguente modo: consideriamo il cilindro C_x ottenuto ruotando attorno all'asse delle y il segmento di estremi $(x; 0)$ e $(x; \sqrt{x})$, con $0 \leq x \leq 4$. La superficie laterale di C_x è $S_x = (2\pi x)\sqrt{x}$. Pertanto, il volume di S è

$$\int_0^4 S_x dx = \int_0^4 (2\pi x)\sqrt{x} dx = \frac{4}{5}\pi \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{128}{5}\pi.$$



D'altro canto, il volume V del solido S si può ottenere come differenza tra il volume V_{CIL} del cilindro di raggio OA con $A(0; 4)$ e altezza AB con $B(4; 2)$, e il volume V_1 del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e dall'asse y . Risulta:

$$V_{CIL} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi.$$

Poiché V_1 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = x^2$, dall'asse x e da $x = 2$, si ha:

$$V_1 = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} [x^5]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Pertanto il volume V vale:

$$V = V_{CIL} - V_1 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi,$$

come desiderato.

A. S. 2010-2011

<p style="text-align: center;">ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011</p>

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario¹.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy .

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perchè dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ .
2. Si provi che, per tutti i reali m , l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in \mathbb{R} . Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s .
4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

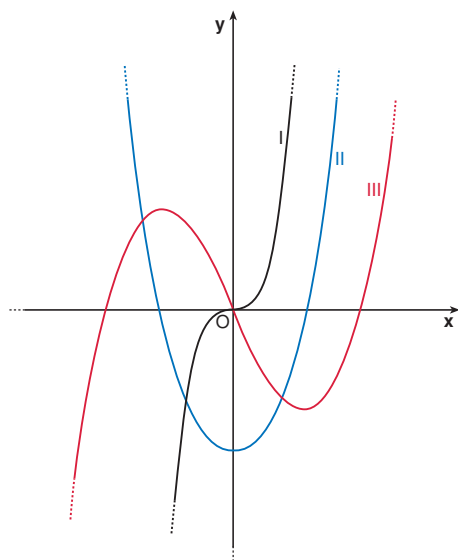
1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy . Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R .
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

QUESTIONARIO

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perchè per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.
3. Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendono i quadrati e i non quadrati,

esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

6. Di tutti i coni iscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.



Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
$A)$	I	II	III
$B)$	I	III	II
$C)$	II	III	I
$D)$	III	II	I
$E)$	III	I	II

Si motivi la risposta.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

1. Poiché $e^x + 1$ è strettamente positivo per ogni x reale, il dominio della funzione

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

è \mathbb{R} : possiamo dunque studiare i limiti all'infinito.

Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

risulta che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 2,$$

Applicando i teoremi sul calcolo dei limiti segue subito che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo $f(x) + f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} = \\ &= 2 \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = \\ &= 2 \left(\ln 4 + \frac{1 + e^x}{1 + e^x} \right) \\ &= 2(\ln 4 + 1). \end{aligned}$$

Ricordiamo che il punto $P(x; y)$ corrisponde nella simmetria di centro A al punto $P'(x'; y')$ se A è il punto medio del segmento PP' , cioè se

$$\frac{x + x'}{2} = x_A, \quad \frac{y + y'}{2} = y_A.$$

Nel nostro caso, preso un generico punto P del grafico, di coordinate $(x; f(x))$, anche il punto P' di coordinate $(-x; f(-x))$ appartiene a Γ , e tale coppia di punti soddisfa le equazioni della simmetria di centro $A(0; \ln 4 + 1)$. Infatti:

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{x - x}{2} = 0, \quad \frac{y + y'}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \ln 4 + 1$$

2. Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - m$ è continua e ha limite rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, perciò, dal teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, esiste almeno un valore di x per cui $f(x) - m = 0$, e quindi $f(x) = m$. D'altra parte, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente, perché la sua derivata è strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \left[-\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right] = \\ &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Per quanto visto nel punto 1, si ha $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1)$, da cui si deduce che

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) + 2(\ln 4 + 1) = -3 + 2(\ln 4 + 1) = 2 \ln 4 - 1.$$

In conclusione, il valore di m richiesto è $m = 2 \ln 4 - 1$

3. Sempre dalla relazione tra $f(x)$ e $f(-x)$ trovata nel punto 1, segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(\ln 4 + 1) - f(-x) = \\ &= 2 \ln 4 + 2 - \left(-x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \right) = \\ &= 2 \ln 4 + 2 + x - \ln 4 - \frac{2}{e^{-x} + 1} = \\ &= x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Cerchiamo gli asintoti di $f(x)$, e verifichiamo che essi coincidono con le rette r e s .

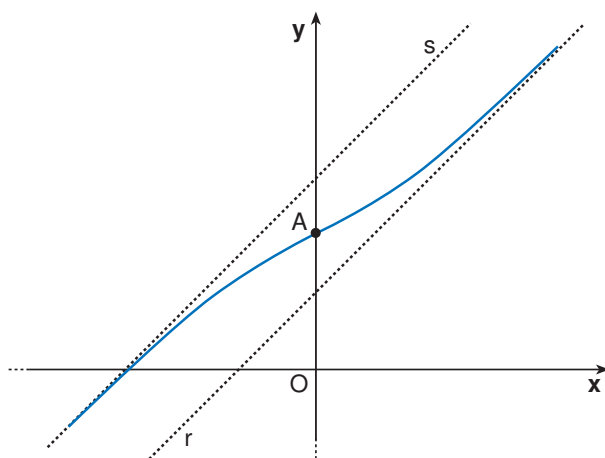
Gli eventuali asintoti di $f(x)$ hanno coefficiente angolare pari al limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x + 1)} \right] = 1,$$

e intercette pari ai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = \ln 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = 2 + \ln 4.$$



Questi sono i valori del coefficiente angolare e delle intercette delle rette r e s .

Per dimostrare che Γ è interamente contenuta nella striscia piana compresa tra r e s , confrontiamo $f(x)$ con le equazioni degli asintoti.

Osserviamo che, essendo $e^x + 1 > 0$,

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} > x + \ln 4$$

e quindi Γ sta al di sopra della retta r . D'altro canto, per quanto visto sopra,

$$f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} < x + 2 + \ln 4.$$

quindi Γ sta al di sotto della retta s . Da queste osservazioni segue quanto richiesto.

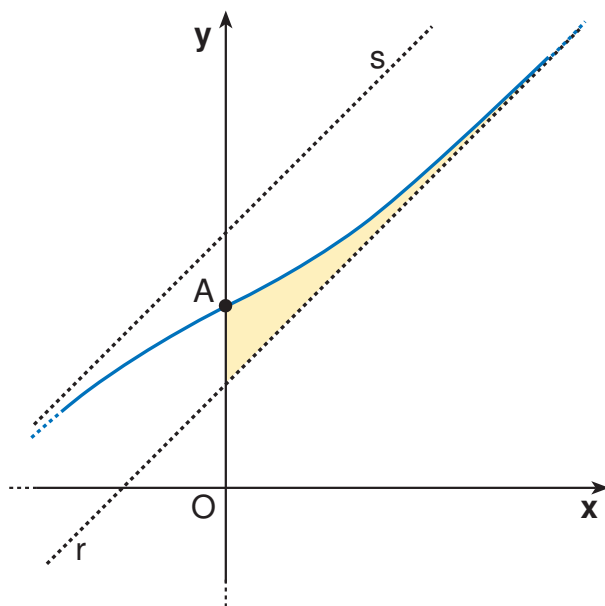
4. L'integrale $I(\beta)$ si può interpretare geometricamente come l'area della regione di piano delimitata dall'asse y , dalla retta di equazione $x = \beta$, dall'asintoto r e dal grafico Γ . Perciò, se il limite $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I_\beta$ è finito esso è uguale all'area compresa tra l'asse y , la curva Γ e la retta r .

Passiamo al calcolo dell'integrale.

$$I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx = \int_0^\beta \frac{2}{e^x + 1} dx$$

Calcoliamo l'integrale per sostituzione. Poniamo $t = e^x$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$:

$$I(\beta) = 2 \int_1^{e^\beta} \frac{1}{t(t+1)} dt.$$



La funzione integranda si può scrivere come somma di due frazioni aventi come denominatori t e $t + 1$. Imponendo

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A + At + Bt}{t(t+1)},$$

e uguagliando i coefficienti dei numeratori si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. L'integrale da calcolare è equivalente a

$$2 \int_1^{e^\beta} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2[\ln t - \ln(t+1)]_1^{e^\beta} = 2 \left[\ln \frac{t}{t+1} \right]_1^{e^\beta} = 2 \ln \left(\frac{e^\beta}{e^\beta + 1} \right) - 2 \ln \frac{1}{2}.$$

Poiché $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^\beta = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) = 0$, risulta

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta) = -2 \ln \frac{1}{2} = \ln 4.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2 CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2011

1. Studio di $y = f(x)$:

- $D_f = \mathbb{R}$.
- Ricerca simmetrie: la funzione è dispari, infatti:

$$f(-x) = -f(x).$$

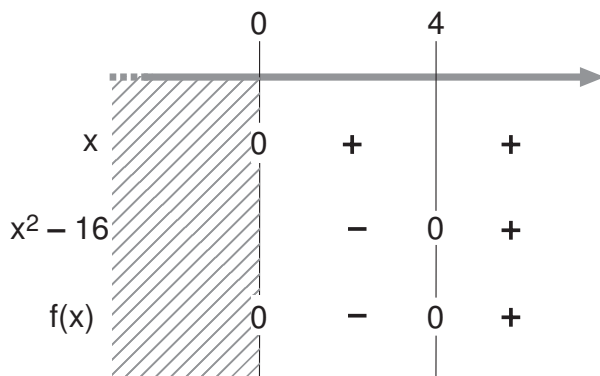
Per questo motivo studiamo la funzione per $x \geq 0$; ricaveremo l'altra metà del grafico per simmetria rispetto all'origine O .

- Punti di intersezione con gli assi coordinati: cominciamo con l'asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 16x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 - 16) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm 4 \end{cases}$$

Ci sono tre punti di intersezione con l'asse x : $A_1(-4; 0)$, $A_2(0; 0)$, $A_3(4; 0)$. Di queste, A_2 è intersezione di $y = f(x)$ anche con l'asse y .

- Positività: $x(x^2 - 16) > 0$:



Quindi la funzione $f(x)$ è positiva (in $x \geq 0$) per $x > 4$.

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Inoltre, poiché

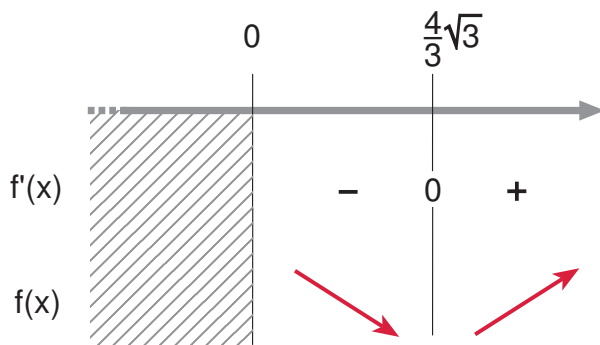
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

- Derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 16.$$

Studio del segno di $f'(x)$:



Nell'intervallo di studio la funzione è crescente per $x > \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Tale valore individua un punto di minimo relativo, secondo lo schema del segno di $f'(x)$ sopra riportato; calcoliamo le sue coordinate:

$$f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9} - \frac{64\sqrt{3}}{3} = -\frac{128\sqrt{3}}{9}.$$

Quindi il punto di minimo relativo è

$$M_1\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$$

e per simmetria il punto

$$M_2\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$$

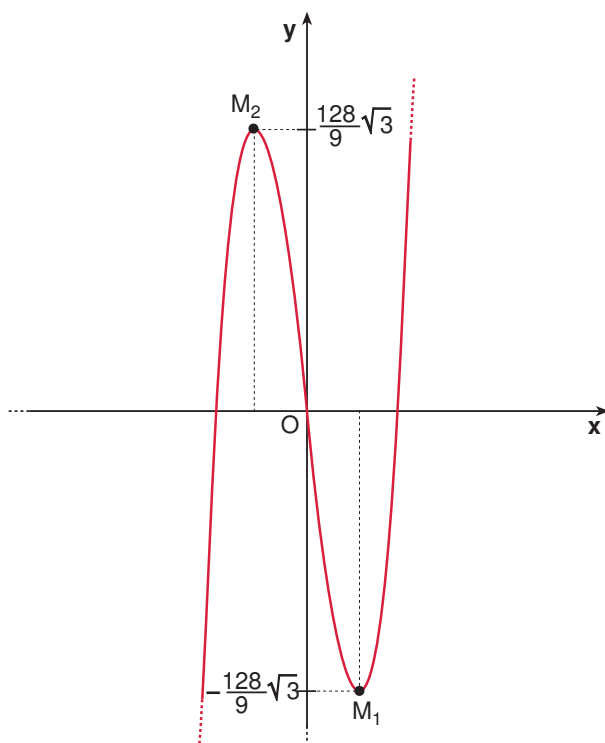
è punto di massimo relativo.

- Derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

Studio del segno di $f''(x)$: nell'intervallo di studio è evidente che $f''(x)$ è sempre non negativa. Pertanto in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre il punto $O(0;0)$ in cui si annulla $f''(x)$ è un punto di flesso.

- Tracciamo il grafico G_f di $y = f(x)$, sfruttando la simmetria rispetto all'origine:



Studio di $g(x)$: tale funzione si ottiene da $y = \sin x$ mediante una contrazione orizzontale che porta il punto $(2\pi; 0)$ in $(4; 0)$.

I punti a tangente orizzontale del grafico di $y = \sin x$ nell'intervallo $[-5\pi; 5\pi]$ hanno coordinate

$$\left(\frac{2k+1}{2}\pi; (-1)^k \right) \quad \text{per} \quad -5 \leq k \leq 4, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza i punti a tangente orizzontale del grafico G_g di $y = g(x)$ compresi nell'intervallo $[-10; 10]$ sono:

$$(2k+1; (-1)^k) \quad \text{per} \quad -5 \leq k \leq 4, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

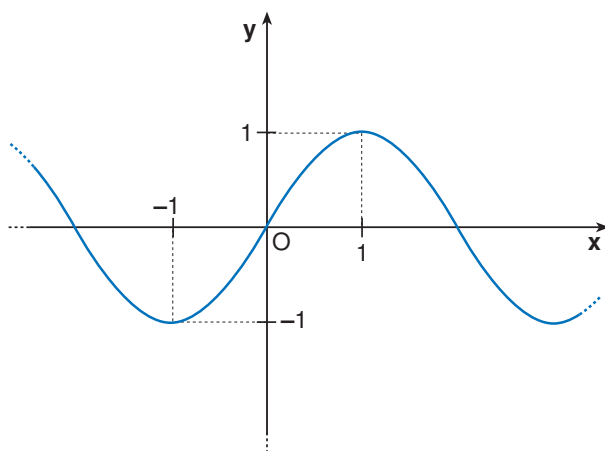
2. Individuiamo graficamente la regione R :

L'area di R è il risultato dell'integrale

$$\int_0^4 [g(x) - f(x)] dx$$

cioè

$$\int_0^4 \left[\sin \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x \right] dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right]_0^4 = 64.$$



3. Rappresentiamo in figura:

Risolviamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y = -15 \\ y = f(x) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = -5 \\ y = f(x) \end{cases}$$

Nel primo otteniamo

$$\begin{cases} y = -15 \\ x^3 - 16x + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ (x-1)(x^2 + x - 15) = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano i punti:

$$A_1(1; -15), \quad B\left(\frac{-1 + \sqrt{61}}{2}; -15\right), \quad C\left(\frac{-1 - \sqrt{61}}{2}; -15\right);$$

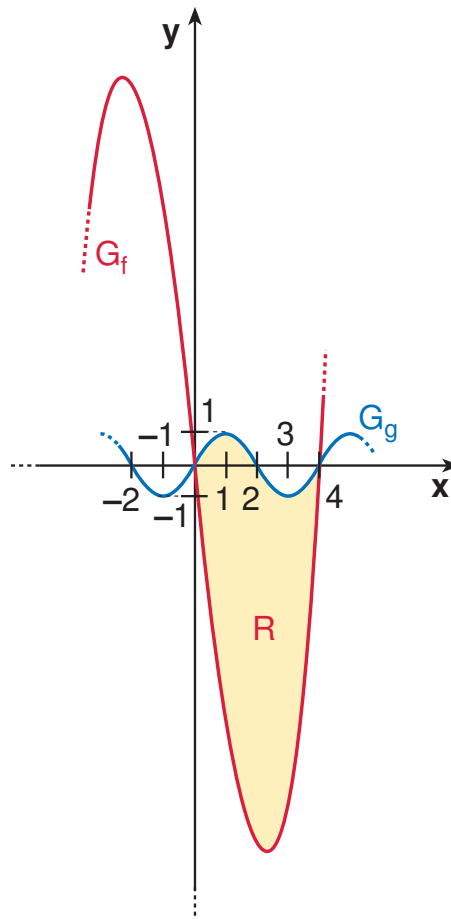
di tali punti solo A e B si trovano sul bordo di R .

Nel secondo sistema

$$\begin{cases} y = -5 \\ x^3 - 16x + 5 = 0 \end{cases}$$

l'equazione di terzo grado ha radici non razionali; calcoliamo una loro approssimazione a meno di 10^{-1} come richiesto nell'intervallo $0 \leq x \leq 4$.

Dal grafico deduciamo che una prima radice \bar{x}_1 ha ascissa compresa tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$; infatti se denotiamo con $p(x)$ il polinomio $x^3 - 16x + 5$, allora $p(0) = 5$ e



$p(1) = -10$ e per il teorema di esistenza degli zeri, $p(x)$ possiede una radice nell'intervallo $]0; 1[$.

Ricaviamo la radice \bar{x}_1 mediante il metodo di bisezione:

$$x_1 = 0, \quad p(x_1) = 5 > 0$$

$$x_2 = 1, \quad p(x_2) = -10 < 0$$

$$\Rightarrow x_1 < \bar{x}_1 < x_2$$

$$x_3 = 0.5, \quad p(x_3) = -\frac{23}{8} < 0$$

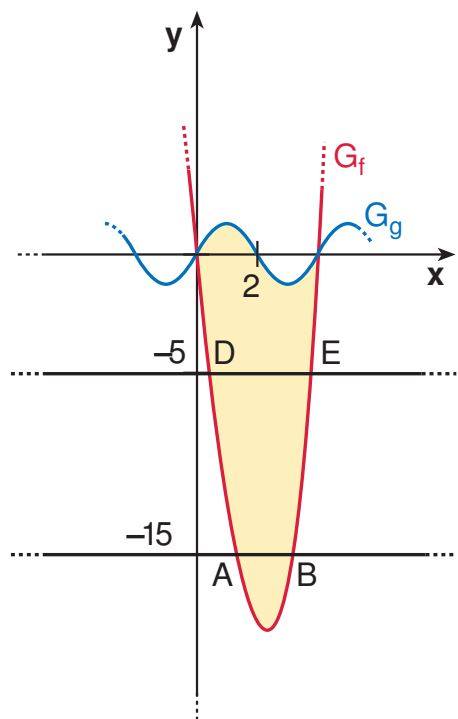
$$\Rightarrow x_1 < \bar{x}_1 < x_3$$

$$x_4 = 0.25, \quad p(x_4) = \frac{65}{64} > 0$$

$$\Rightarrow x_4 < \bar{x}_1 < x_3$$

$$x_5 = 0.375, \quad p(x_5) = -\frac{485}{512} < 0$$

$$\Rightarrow x_4 < \bar{x}_1 < x_5$$



$$x_6 = 0.3125, \quad p(x_6) = \frac{125}{4096} > 0$$

$$\Rightarrow x_6 < \bar{x}_1 < x_5 \Rightarrow 0.3125 < \bar{x}_1 < 0.375.$$

Per quanto riguarda la seconda radice \bar{x}_2 , la ricaviamo mediante il metodo delle tangenti, assumendo come punto iniziale $x_0 = 4$.

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 4 - \frac{5}{32} \simeq 3.844$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} \simeq 3.833$$

$$\Rightarrow x_2 < \bar{x}_2 < x_1 \Rightarrow 3.833 < \bar{x}_2 < 3.844.$$

4. Il volume d'acqua della piscina può essere calcolato nel modo seguente: sezioniamo il solido in esame con piani del tipo $x = x_0$ perpendicolari alla superficie della vasca e paralleli all'asse y . Otteniamo dei rettangoli di area

$$S(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)] \cdot h(x_0).$$

Quindi il volume della vasca espresso in m^3 è equivalente al valore dell'integrale definito:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 S(x)dx = \int_0^4 \left[\sin \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x \right] \cdot (5-x)dx = \\
 &= 5 \int_0^4 \sin \frac{\pi}{2}x dx - \int_0^4 x \sin \frac{\pi}{2}x dx + \int_0^4 (-5x^3 + x^4 + 80x - 16x^2) dx = \\
 &= \left[-\frac{10}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{5}{4}x^4 + \frac{x^5}{5} + 40x^2 - \frac{16}{3}x^3 \right]_0^4 - \int_0^4 x \sin \frac{\pi}{2}x dx = \\
 &= \frac{2752}{15} - \int_0^4 x \sin \frac{\pi}{2}x dx .
 \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^4 x \sin \frac{\pi}{2}x dx$ può essere risolto per parti secondo la formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e ponendo

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \sin \frac{\pi}{2}x .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 x \sin \frac{\pi}{2}x dx &= \left[-\frac{2x}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \right]_0^4 + \int_0^4 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x dx \\
 &= -\frac{8}{\pi} + \left[\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2}x \right]_0^4 = -\frac{8}{\pi} .
 \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'espressione del volume V si ottiene:

$$V = \frac{2752\pi + 120}{15\pi} m^3$$

e perciò la capacità della piscina è di circa

$$186013.15l .$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 1 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011</p>

Fino all'inizio del 1800 la geometria euclidea, insieme alla teoria della meccanica newtoniana, furono alla base della conoscenza scientifica. La scoperta delle geometrie non euclidee ha rivoluzionato la concezione del rapporto tra geometria e realtà: le geometrie non euclidee si svilupparono nel XIX secolo, quando i ripetuti fallimenti dei tentativi di ricavare il V postulato di Euclide dagli altri quattro, portarono i matematici a elaborare dei nuovi modelli coerenti in cui il V postulato veniva sostituito da una sua negazione. In tal modo nacquero la geometria iperbolica di Lobačevskij e Bolyai e le geometrie sferica ed ellittica: nella geometria iperbolica, dati una retta e un punto esterno a essa, è possibile condurre per quel punto infinite rette che non intersecano la retta data. Nelle geometrie sferica ed ellittica, oltre alla negazione del V postulato, sono introdotte delle modifiche più ampie dell'edificio euclideo; in particolare per un punto esterno a una retta non passa alcuna retta parallela a una retta data.

La scoperta di una pluralità di geometrie ha portato i fisici a chiedersi quale fosse la più adatta alla descrizione dello spazio fisico, il quale non poteva più essere considerato necessariamente euclideo. Infatti la teoria della relatività generale di Einstein ha proposto nel 1916 una nuova teoria della gravitazione che prevede uno spazio che può essere globalmente curvo e deve essere localmente curvo. Il problema della eventuale curvatura globale dello spazio è divenuto fondamentale per la moderna cosmologia: in questo contesto la relatività generale ammette sia la soluzione euclidea, sia soluzioni di tipo non euclideo. Il verificarsi di una o delle altre dipende dalla densità di materia dell'universo: ad esempio lo spazio è incurvato dalla massa del Sole e la luce, passando nelle sue vicinanze, percorre delle linee che non coincidono con le rette euclidee.

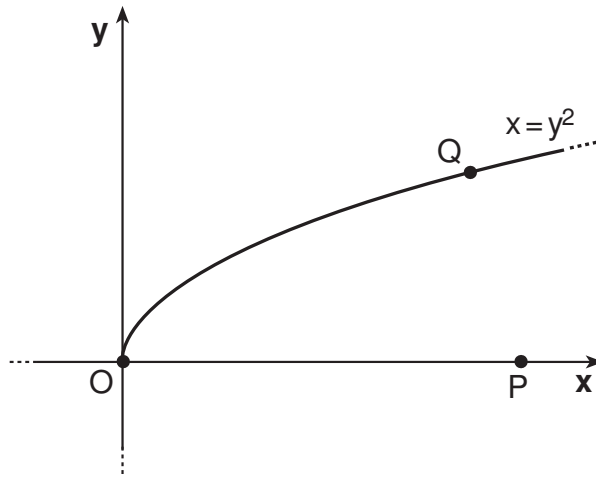
In definitiva Silvia ha torto: non esiste un modello geometrico globale migliore degli altri. Esistono solo modelli che meglio si adattano alle diverse soluzioni locali.

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

La curva di equazione $y = \sqrt{x}$ è un ramo di parabola, infatti tale equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Il punto di P di coordinate $(4; 0)$ non è un punto di tale curva.



Un generico punto Q della curva ha coordinate $Q(t^2; t)$ con $t \geq 0$. Calcoliamo la distanza di Q da P in funzione del parametro t :

$$\overline{QP}^2 = (t^2 - 4)^2 + t^2 = t^4 - 8t^2 + 16 + t^2 = t^4 - 7t^2 + 16.$$

I valori di t che rendono minimo \overline{QP} sono tutti e soli quelli che rendono minimo \overline{QP}^2 . Per semplicità, consideriamo allora

$$f(t) = t^4 - 7t^2 + 16, \text{ per } t \geq 0.$$

Per trovare il minimo di questa funzione, studiamo il segno della sua derivata:

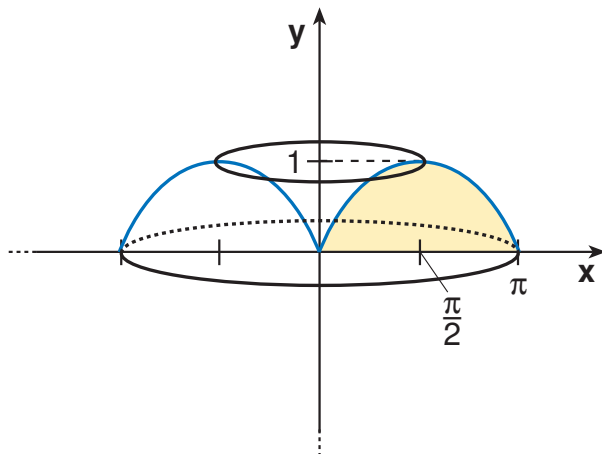
$$f'(t) = 4t^3 - 14t = 2t(2t^2 - 7).$$

Ricordando che t assume valori non negativi, la derivata è positiva per $t > \sqrt{\frac{7}{2}}$ e negativa per $0 < t < \sqrt{\frac{7}{2}}$. Ne segue che la funzione assume il valore minimo per $t = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Il corrispondente punto Q sulla curva è, in conclusione, $Q\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Rappresentiamo la regione R e il solido W .



Consideriamo le funzioni:

$$f(x) = \sin x, \quad \text{nel dominio } \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$g(x) = \sin x, \quad \text{nel dominio } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

Il codominio di entrambe le funzioni è l'intervallo $[0; 1]$.

Il solido W è la differenza dei due solidi delimitati dalle superfici di rotazione generate dai grafici di f e di g attorno all'asse y .

Entrambe le funzioni f e g sono invertibili, e occorre esplicitare le loro funzioni inverse poiché, per calcolare i volumi, occorrerà integrare rispetto ad y .

Per fare questo, occorre ricordare che le soluzioni con $x \in [0; \pi]$ dell'equazione $\sin x = y$ (con $y \in [0; 1]$) sono $x_1 = \arcsin y$ e $x_2 = \pi - \arcsin y$. Dunque:

$$f^{-1}(y) = \arcsin y, \quad g^{-1}(y) = \pi - \arcsin y.$$

Passiamo ora al calcolo del volume:

$$\begin{aligned} V_W &= \pi \int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2 dy - \pi \int_0^1 \arcsin^2 y dy = \\ &= \pi \int_0^1 [(\pi - \arcsin y)^2 - \arcsin^2 y] dy = \\ &= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \arcsin y) dy. \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^1 \arcsen y \, dy$ può essere calcolato per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 1 \cdot \arcsen y \, dy &= [y \arcsen y]_0^1 - \int_0^1 y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy = \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (-2y) \cdot (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \, dy = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[2(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

Tornando all'integrale per il calcolo del volume:

$$\begin{aligned}V_W &= \pi \left(\int_0^1 \pi^2 dy - 2\pi \int_0^1 \arcsen y \, dy \right) = \\ &= \pi \left[\pi^2 - 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = \\ &= \pi^3 - \pi^3 + 2\pi^2 = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Il volume del solido è dunque $2\pi^2$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Risolviamo l'equazione:

$$C_{n,4} = C_{n,3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4.$$

Utilizziamo la formula

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \quad \text{con } n \geq k :$$

$$C_{n,4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!},$$
$$C_{n,3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}.$$

Uguagliamo:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2}$$
$$\Rightarrow \frac{n-3}{4} = 1$$

da cui si ottiene $n = 7$ come soluzione accettabile.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 5 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011</p>

È evidente che l'insieme dei numeri naturali che sono dei quadrati perfetti costituisce un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri naturali. In tal senso, si sarebbe portati a concludere “i numeri tutti, quadrati e non quadrati, essere più che i quadrati soli”.

D'altra parte, è anche evidente ritenere che due insiemi che si possono porre in corrispondenza biunivoca abbiano “lo stesso numero di elementi”. Una tale corrispondenza esiste tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme di quadrati:

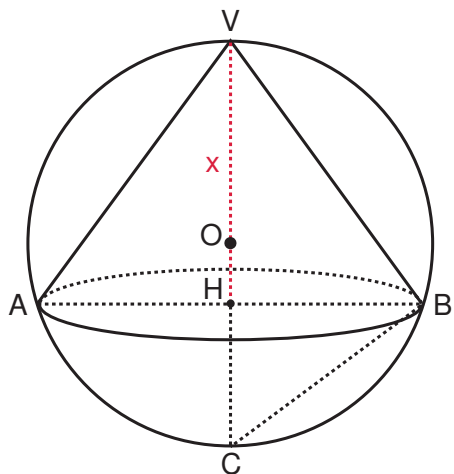
$$n \mapsto n^2,$$

ovvero, a un numero naturale n corrisponde uno e un solo n^2 . In tal senso, non si può certo dire che “i numeri tutti, quadrati e non quadrati” siano “più che i quadrati soli”.

L'apparente contraddizione si spiega con il diverso significato della parola “più” nel primo e nel secondo caso. Nel primo caso i due insiemi sono ordinati per *inclusione*, mentre nel secondo sono ordinati per *cardinalità*.

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Rappresentiamo il solido di cui si chiede il volume:



Dato un cono inscritto nella sfera di centro O e raggio 10 cm, indichiamo con x l'altezza VH del cono (omettiamo per comodità l'unità di misura): $\overline{VH} = x$, $0 < x < 20$.

Applicando i teoremi di Euclide al triangolo rettangolo VCB , otteniamo:

$$\overline{VB} = \sqrt{\overline{VC} \cdot \overline{VH}} \Rightarrow \overline{VB} = \sqrt{20x},$$

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{HC}} \Rightarrow \overline{HB} = \sqrt{x(20 - x)}.$$

Troviamo la superficie laterale del cono:

$$S_l = \frac{2\pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB}}{2} = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB}.$$

Sostituiamo le espressioni precedenti:

$$S_l(x) = \pi \sqrt{x(20 - x)} \cdot \sqrt{20x} = \pi \sqrt{400x^2 - 20x^3} = 20\pi \sqrt{x^2 - \frac{x^3}{20}}, \quad 0 < x < 20.$$

Studiamo la derivata prima della funzione $S_l(x)$ e il suo segno:

$$S'_l(x) = 10\pi \frac{2x - \frac{3}{20}x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{x^3}{20}}}.$$

$$\begin{aligned}
S'_l(x) &> 0 & \text{per } 0 < x < \frac{40}{3}, \\
S'_l(x) &< 0 & \text{per } \frac{40}{3} < x < 20, \\
S'_l(x) &= 0 & \text{per } x = \frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

Pertanto la funzione $S_l(x)$ ha massimo in $x = \frac{40}{3}$, ovvero quando l'altezza è pari a $\overline{VH} = \frac{40}{3}$ cm.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 7 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011</p>

Consideriamo i seguenti eventi:

E_0 = “nessuna quaterna è corretta”,

E_1 = “una quaterna è corretta”,

E = “almeno due quaterne sono corrette”.

La probabilità dell’evento E risulta:

$$P(E) = 1 - P(E_0) - P(E_1).$$

Visto che

$$P(E_0) = \frac{3^{10}}{4^{10}},$$
$$P(E_1) = 10 \cdot \frac{3^9}{4^{10}},$$

allora

$$P(E) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \simeq 0,75597.$$

<p>SOLUZIONE DEL QUESITO 8</p> <p>CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011</p>
--

Il problema della quadratura del cerchio fa parte della celebre famiglia di problemi classici che non possono essere risolti utilizzando soltanto riga (senza tacche) e compasso. Dato un cerchio, di centro e raggio noti, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 fu dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. L'impossibilità di tale costruzione deriva dal fatto che π è un numero trascendente.

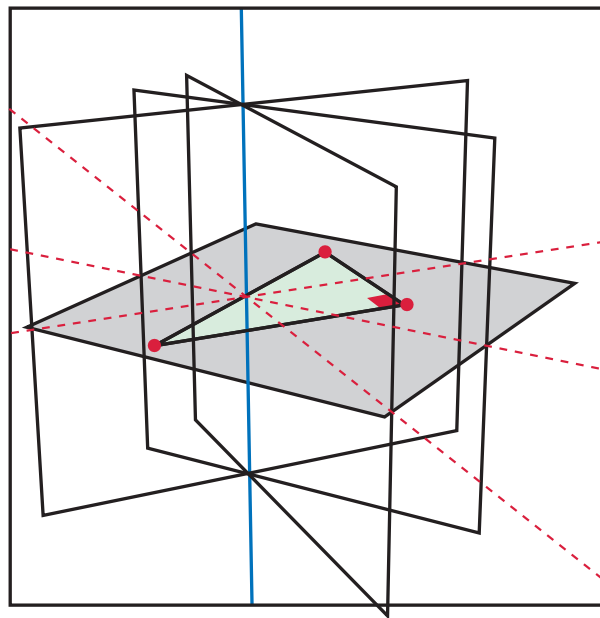
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Proponiamo due metodi, il primo di geometria euclidea (sintetica) e il secondo di geometria analitica.

Metodo sintetico.

Ricordiamo che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati A e B è il *piano assiale* del segmento AB , ovvero il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB .

Da ciò segue che il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo. Tali piani si intersecano in effetti in una retta perpendicolare al piano π contenente il triangolo.



Prendiamo infatti due qualunque di tali piani assiali, diciamo α piano assiale del lato a e β piano assiale del lato b , allora α e β sono perpendicolari a π , e le loro intersezioni con π sono gli assi di a e b . L'intersezione di α e β è dunque una retta perpendicolare a π , passante per l'ortocentro del triangolo.

Ricordiamo infine che l'ortocentro di un triangolo rettangolo è il punto medio dell'ipotenusa.

Metodo analitico

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano i punti $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$. Sia $P(x; y; z)$ un generico punto dello spazio. La condizione $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$ equivale alle equazioni:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + (y - b)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Semplificando, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

che sono quelle della retta perpendicolare al piano del triangolo, $z = 0$, e passante per il punto $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$, che è il punto medio di AB .

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

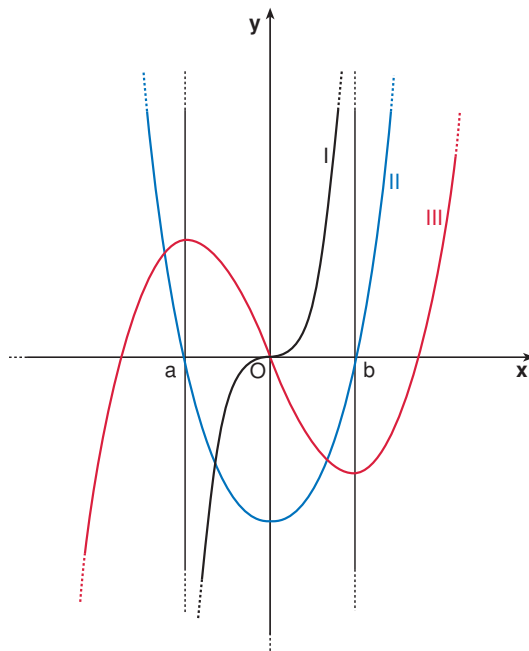
Possiamo subito escludere le alternative A) e B). Infatti, se il grafico di f fosse I, ne seguirebbe che, per $x > 0$, sia il grafico di f' sia quello di f'' dovrebbero trovarsi nel primo quadrante poiché f è, per ogni $x > 0$, strettamente crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

Anche l'alternativa C) non può essere corretta, poiché, per $x > 0$, la funzione II è crescente, mentre la funzione III assume tutti i valori negativi in corrispondenza di alcune ascisse positive.

Analogamente, escludiamo anche l'alternativa E), poiché vi è un intervallo in cui la funzione III decresce mentre il grafico I si mantiene nel semipiano delle ordinate positive.

L'unica alternativa plausibile è la D). Analizziamola in dettaglio.

Osserviamo innanzitutto che gli zeri del grafico II corrispondono ai punti di massimo e minimo locali di III. Indichiamoli con a e b .



Per $x < a$ e per $x > b$, la funzione III è crescente e quella II è positiva. Mentre, per $a < x < b$, la funzione III è decrescente e, coerentemente, la funzione II assume valori negativi. Ne segue che il grafico II è compatibile con quello della derivata prima della funzione III. Per quanto riguarda la derivata seconda, osserviamo che la funzione I è

positiva proprio per $x > 0$, cioè in corrispondenza dell'intervallo in cui il grafico III ha la concavità verso l'alto. Quest'ultima inoltre ha la concavità rivolta verso il basso proprio in corrispondenza delle ascisse per le quali la funzione I risulta negativa.

La risposta corretta è, in conclusione, la D).

A. S. 2011-2012

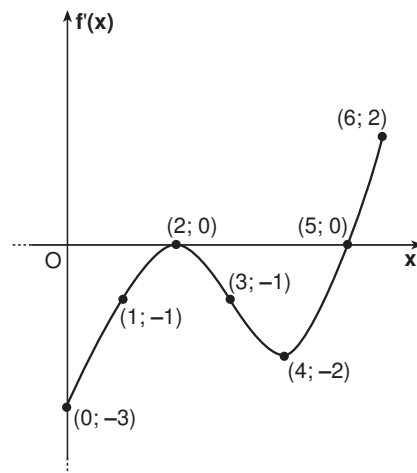
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Della funzione f , definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.

1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f ?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.



PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano Oxy , si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R , ruotando attorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

¹Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0 . Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r ed s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

QUESTIONARIO

1. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$$

2. Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?
3. Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x , approssimato a meno di 10^{-3} , la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?
4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.
5. Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?
6. Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.
7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .
8. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si

produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.
10. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r , quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

1. I punti di flesso sono definiti come i punti in cui la derivata seconda si annulla.

Poichè il grafico mostrato è il grafico della derivata prima di f , possiamo considerare la retta tangente al grafico di f'

$$y - f'(x_0) = f''(x_0) \cdot (x - x_0)$$

in ogni punto dell'intervallo $[0; 6]$.

I punti di flesso perciò sono i punti in cui il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f' è zero, ovvero i punti in cui la tangente al grafico di f' è orizzontale (e in cui la derivata non cambia segno). Le ascisse di tali punti sono $x = 2$ e $x = 4$.

2. Essendo f una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, essa ha massimo e minimo assoluti.

Poichè una funzione derivabile è monotona crescente negli intervalli in cui $f' > 0$ e decrescente dove $f' < 0$ (tranne al più in punti isolati), deduciamo dal grafico che la funzione è monotona decrescente nell'intervallo $]0; 5[$ e monotona crescente nell'intervallo $]5; 6[$. Pertanto, f assume il suo minimo in $x = 5$, e $f(5) = 3$.

Per determinare il massimo assoluto, osserviamo che la funzione ha due massimi relativi in $x = 0$ e $x = 6$. Sappiamo che $f(0) = 9$. Per determinare il valore $f(6)$, usiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, che afferma che, essendo f' continua,

$$\int_0^6 f'(x)dx = f(6) - f(0)$$

cioè

$$f(6) = f(0) - 5 = 4.$$

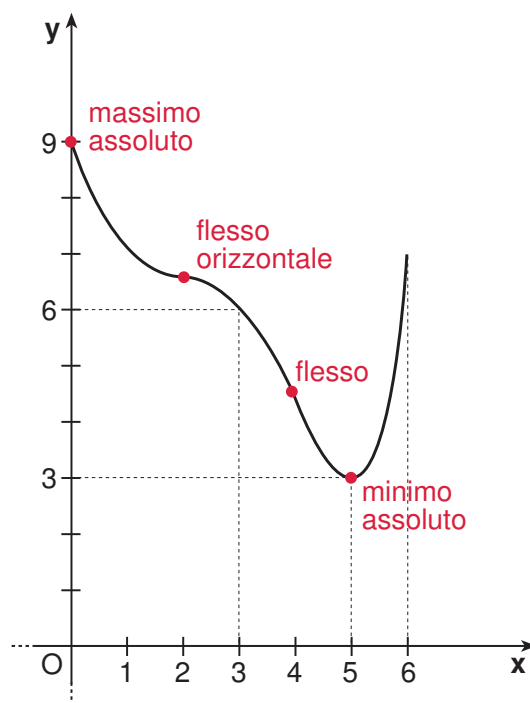
Quindi il massimo assoluto è assunto nel punto $x = 0$ e $f(0) = 9$.

3. Sappiamo che:

- f decresce strettamente su $[0; 5]$;
- f ha un flesso orizzontale in $x = 2$;

- f ha un minimo in $x = 5$;
- f è sempre positiva.

Quindi il grafico di $f(x)$ è il seguente.



4. In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un generico punto $(x_0; y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y , ha equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Nel punto $x_0 = 3$, risulta $f(3) = 6$, $f'(3) = -1$, $g(3) = 3 \cdot f(3) = 18$. Poiché $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ vale $g'(3) = 6 + 3 \cdot (-1) = 3$. Pertanto la retta tangente a G_f nel punto $x = 3$ ha equazione:

$$y - 6 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 9,$$

mentre la retta tangente a G_g nel punto $x = 3$ ha equazione:

$$y - 18 = 3(x - 3) \rightarrow y = 3x + 9.$$

Determiniamo la misura dell'angolo acuto α formato dalle due rette tangenti sapendo che

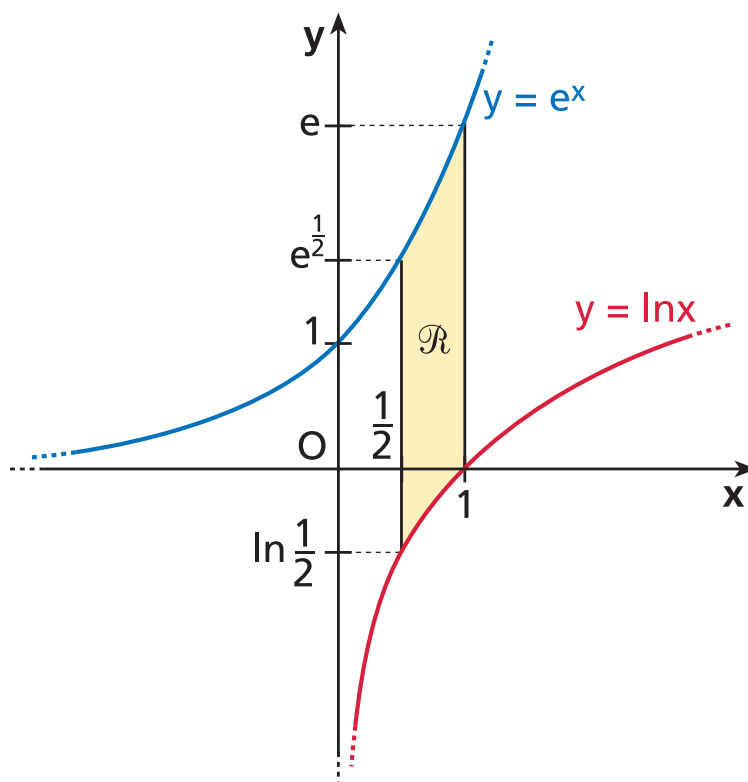
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

dove m e m' sono i coefficienti angolari delle due rette tangenti. Pertanto l'angolo α vale

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{m - m'}{1 + mm'} = \operatorname{arctg} \frac{-1 - 3}{1 - 3} = \operatorname{arctg} 2 \simeq 63^\circ 26'.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2012

1. Rappresentiamo in figura i grafici delle funzioni f e g e la regione \mathcal{R} , la cui area è data da



$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^x - \ln x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 e^x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx \end{aligned}$$

Proseguiamo calcolando l'integrale del logaritmo per parti

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \left[e^x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left(\left[x \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 x \frac{1}{x} dx \right) \\ &= e - \sqrt{e} - \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) + \left[x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= e - \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. La regione \mathcal{R} è divisa in due parti dall'asse x . Chiamiamo \mathcal{R}_1 la parte sovrastante l'asse x e \mathcal{R}_2 quella ad esso sottostante. Nella rotazione attorno all'asse x , il solido generato da \mathcal{R}_2 è contenuto nel solido generato dalla rotazione di \mathcal{R}_1 , quindi possiamo ignorarlo. Otteniamo quindi

$$S = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2x} dx$$

Nella rotazione attorno all'asse y , consideriamo separatamente T_1 il solido generato dalla rotazione di \mathcal{R}_1 e T_2 il solido generato dalla rotazione di \mathcal{R}_2 .

Indichiamo con V_1 il volume del cilindro di raggio di base $\frac{1}{2}$ e altezza \sqrt{e} e con V_2 il volume del solido generato dalla rotazione della regione di piano compresa tra l'asse y , la curva $y = f(x)$ e le rette di equazione $y = \sqrt{e}$ e $y = e$. Per calcolare il volume di T_1 sottraiamo al volume del cilindro di raggio di base 1 e altezza e il volume $V_1 + V_2$.

Per calcolare V_2 utilizziamo l'equazione della funzione inversa di f :

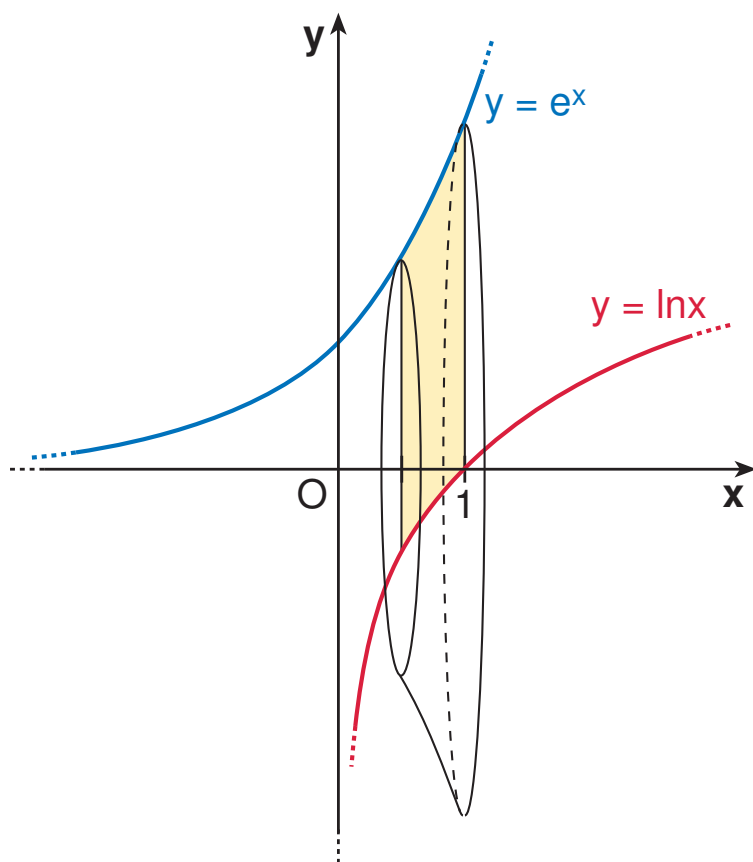
$$V_2 = \pi \int_{\sqrt{e}}^e \ln^2 x dx.$$

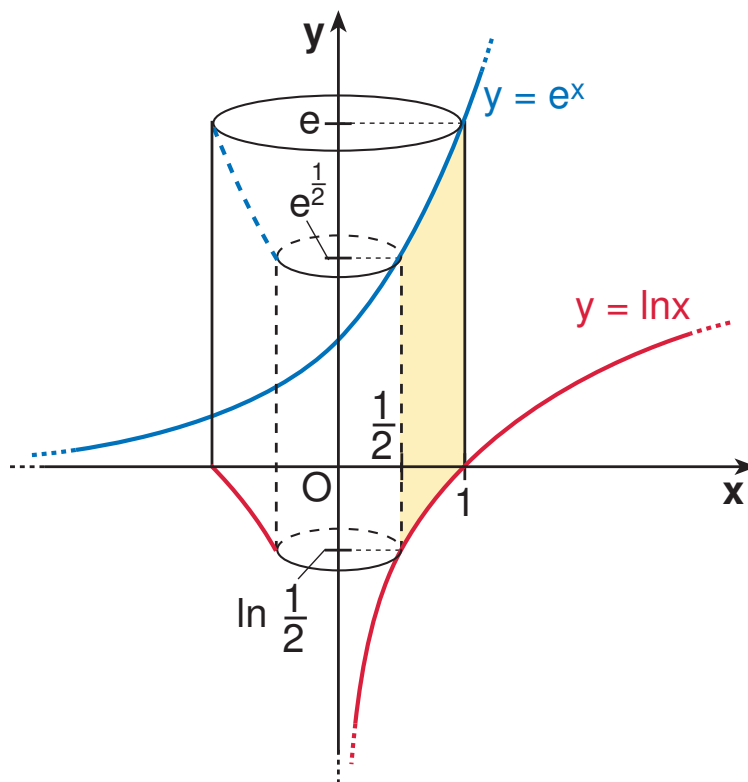
Otteniamo pertanto:

$$V(T_1) = \pi e - \frac{1}{4} \pi \sqrt{e} - \pi \int_{\sqrt{e}}^e \ln^2 x dx.$$

Per calcolare il volume di T_2 sottraiamo al volume del solido generato dalla rotazione della regione individuata dall'asse y , dalla curva $y = g(x)$, dall'asse x e dalla retta di equazione $y = \ln \frac{1}{2}$ il volume del cilindro di raggio di base $\frac{1}{2}$ e altezza $\left| \ln \frac{1}{2} \right|$. Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} V(T_2) &= \pi \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 e^{2x} dx - \frac{1}{4} \pi \left| \ln \frac{1}{2} \right| \\ &= \pi \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 e^{2x} dx - \frac{1}{4} \pi \ln 2. \end{aligned}$$





Pertanto il volume del solido T vale

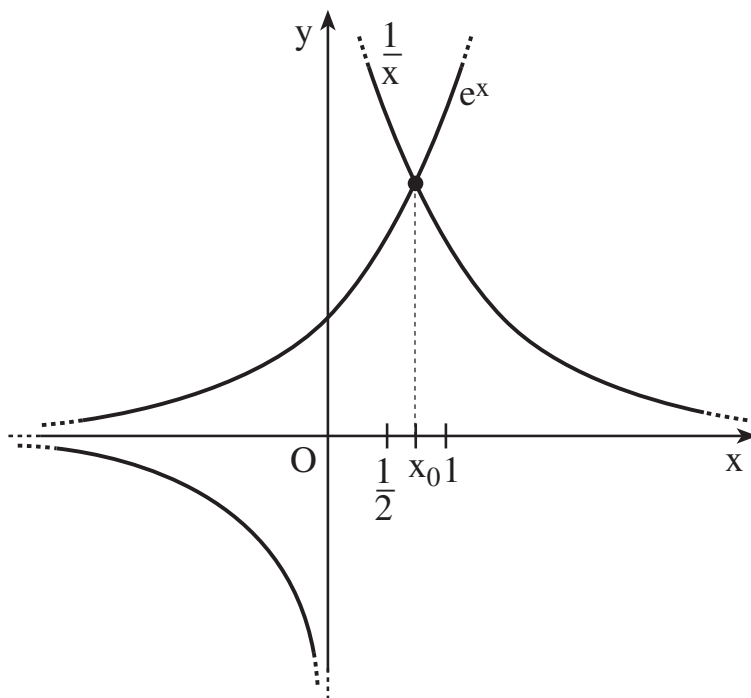
$$\begin{aligned}
 V(T) &= V(T_1) + V(T_2) = \\
 &= \pi e - \frac{1}{4} \pi \sqrt{e} - \pi \int_{\sqrt{e}}^e \ln^2 x \, dx + \pi \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 e^{2x} \, dx - \frac{1}{4} \pi \ln 2.
 \end{aligned}$$

3. Dobbiamo dimostrare che esiste un solo valore $x_0 > 0$ tale che i coefficienti angolari delle rette tangenti ai grafici rispettivamente di f e di g , nei loro punti di ascissa x_0 , sono uguali.

Dobbiamo quindi provare che esiste un solo $x_0 > 0$ che verifica $f'(x) = g'(x)$, cioè $e^x = \frac{1}{x}$.

Rappresentiamo in un unico piano cartesiano i grafici di $f'(x)$ e $g'(x)$ e osserviamo che vi è un unico punto di intersezione di ascissa positiva interna all'intervallo $[\frac{1}{2}; 1]$

Poniamo $F(x) = e^x - \frac{1}{x}$ e determiniamo l'ascissa x_0 che annulla $F(x)$, con il metodo numerico di bisezione.



n	a_n	b_n	m_n	$F(a_n)$	$F(b_n)$	$F(m_n)$	ε_n
0	0,5	1	0,75	-0,351279	1,718282	0,783667	0,25
1	0,5	0,783667	0,641834	-0,351279	0,783667	0,341927	0,141834
2	0,5	0,641834	0,570917	-0,351279	0,341927	0,018321	0,070917
3	0,5	0,570917	0,535459	-0,351279	0,018321	-0,159325	0,035459
4	0,535459	0,570917	0,553188	-0,159325	0,018321	-0,068916	0,017729
5	0,553188	0,570917	0,562053	-0,068916	0,018321	-0,024922	0,008865

Pertanto la soluzione è $x_0 \simeq 0,56$.

4. La funzione $h(x)$ è definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[\frac{1}{2}; 1]$ quindi, per il teorema di Weierstrass, la funzione ammette massimo e minimo assoluti. Per il punto precedente, nell'intervallo dato, la funzione ha un solo punto stazionario in $x_0 \simeq 0,56$.

Confrontando il valore della funzione agli estremi dell'intervallo e nel punto stazionario otteniamo

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \ln \frac{1}{2} \simeq 2,3419;$$

$$h(1) = e \simeq 2,7183;$$

$$h(x_0) \simeq 2,3305.$$

Quindi nell'intervallo $[\frac{1}{2}; 1]$, il punto di massimo assoluto è $x = 1$ e il punto di minimo assoluto è $x = x_0$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$ è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Tutte le ipotesi della regola di De L'Hospital sono verificate, pertanto risulta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(2^{3x} - 3^{4x})}{D(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln 2 \cdot 2^{3x} - 4 \ln 3 \cdot 3^{4x}}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln 2 - 4 \ln 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 8 - \ln 81}{2x} = -\infty.\end{aligned}$$

Se non si vuole applicare il teorema di De L'Hospital, si può scrivere la funzione di partenza come prodotto di due funzioni e poi procedere con il calcolo del limite:

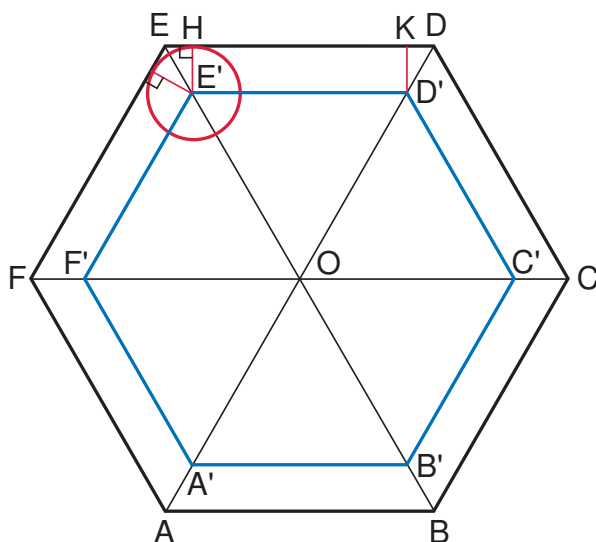
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{2^{3x} - 1 + 1 - 3^{4x}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{2^{3x} - 1}{x} - \frac{3^{4x} - 1}{x} \right] = -\infty,\end{aligned}$$

perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e, utilizzando il prodotto notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ per $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2^{3x} - 1}{x} - \frac{3^{4x} - 1}{x} \right] = \ln 2^3 - \ln 3^4.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Affinché la moneta non intersechi i lati dell'esagono, il suo centro deve trovarsi all'interno o sul bordo dell'esagono $A'B'C'D'E'F'$, come mostrato in figura. Il lato dell'esagono



$A'B'C'D'E'F'$ si ottiene dal lato dell'esagono $ABCDEF$ sottraendo le misure dei segmenti \overline{EH} e \overline{DK} . I triangoli $EE'H$ e $DD'K$ sono rettangoli, tra loro congruenti, con angoli acuti di 30° e 60° . Abbiamo quindi

$$\overline{EH} = \frac{\overline{E'H} \cdot \sqrt{3}}{3}; \quad \overline{E'D'} = \overline{ED} - \overline{EH} - \overline{KD} = \overline{ED} - 2\overline{EH} = \overline{ED} - \frac{2 \cdot \overline{E'H} \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

$E'H$ è il raggio della moneta e $2E'H$ è il suo diametro. Esprimiamo il diametro della moneta e il lato dell'esagono nelle stesse unità di misura, i millimetri, e sostituiamoli nell'espressione

$$\overline{E'D'} = 100 - 7.75\sqrt{3}.$$

La probabilità p cercata è data dal rapporto fra le aree dei due esagoni o, in modo analogo, dal quadrato del rapporto dei loro lati, poiché i due esagoni sono simili. Otteniamo quindi:

$$p = \left(\frac{\overline{E'D'}}{\overline{ED}} \right)^2 = \left(\frac{100 - 7.75\sqrt{3}}{100} \right)^2 \approx 0,7496,$$

in percentuale 74,96%.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

La pendenza della retta tangente al grafico della funzione f in un punto $(x; f(x))$ è data dal valore della derivata della funzione calcolata nel punto x . La funzione in esame è derivabile in tutto \mathbb{R} , quindi ne calcoliamo la derivata e stabiliamo per quale x essa vale 1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$f'(x) = \ln(3) 3^x$$
$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(3) 3^x = 1.$$

Risolviamo l'equazione esponenziale isolando il termine 3^x e applicando il logaritmo in base 3:

$$\ln(3) 3^x = 1 \Leftrightarrow x = -\log_3(\ln(3)).$$

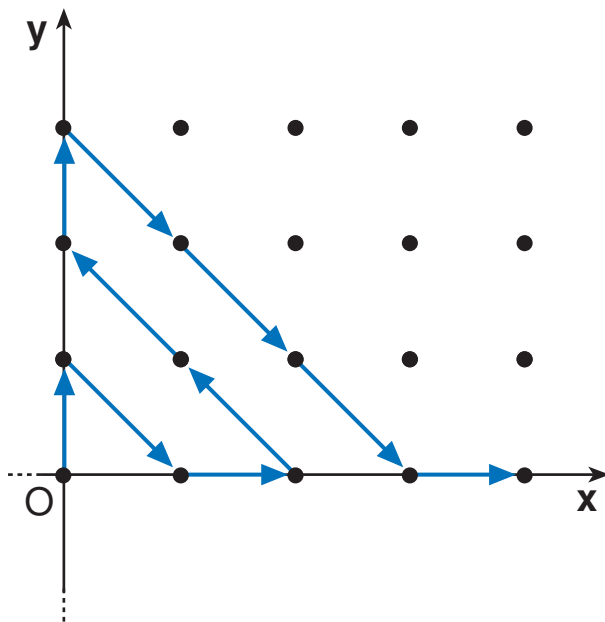
Utilizzando la formula del cambiamento di base, riscriviamo tutto in base e e otteniamo

$$x = -\log_3(\ln(3)) = -\frac{\ln(\ln(3))}{\ln(3)} \simeq -0,086.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Dimostriamo inizialmente che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Osserviamo la seguente figura. Se seguiamo la biscia blu possiamo costruire una applica-



zione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a \mathbb{N} nel seguente modo.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ (0; 0) & \mapsto 0 \\ (0; 1) & \mapsto 1 \\ (1; 0) & \mapsto 2 \\ (2; 0) & \mapsto 3 \\ (1; 1) & \mapsto 4 \\ (0; 2) & \mapsto 5 \\ (0; 3) & \mapsto 6 \\ (1; 2) & \mapsto 7 \\ \vdots & \mapsto \vdots \end{array}$$

Risulta così dimostrato che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Dimostriamo ora che \mathbb{Q}^+ ha la stessa cardinalità di \mathbb{N} .

Consideriamo l'applicazione

$$i : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\frac{m}{n} \text{ con } m, n \text{ primi fra loro} \mapsto (m; n)$$

Si ha che i è ben definita infatti se $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ allora $i(\frac{m}{n}) = i(\frac{m'}{n'})$.

Inoltre i è iniettiva poiché se $i(\frac{m}{n}) = i(\frac{m'}{n'})$ allora $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

Abbiamo così dimostrato che $i(\mathbb{Q}^+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, quindi la cardinalità di \mathbb{Q}^+ è al più la cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Poiché \mathbb{Q}^+ è un insieme infinito necessariamente la cardinalità di \mathbb{Q}^+ è quella di \mathbb{N} .

Lo stesso ragionamento si può ripetere con \mathbb{Q}^- . Possiamo così affermare che

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

è numerabile perché unione finita di insiemi numerabili.

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Ricordiamo che:

- un segmento è univocamente determinato dai suoi estremi;
- un triangolo è univocamente determinato dai suoi vertici;
- un tetraedro è univocamente determinato dai suoi vertici.

Pertanto il numero di segmenti che si possono costruire dati n punti corrisponde al numero di coppie di punti che si possono scegliere dagli n dati, ovvero

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analogamente, il numero di triangoli corrisponde al numero di triplette di punti che si possono formare dagli n dati, ovvero

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Allo stesso modo si ottiene che il numero di tetraedri, corrispondente al numero di quaterne di punti che si possono scegliere dagli n dati, è

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + ax + b$. Essa ha dominio reale, è continua e derivabile su \mathbb{R} . Calcoliamo la derivata, prima e seconda:

$$f'(x) = 3x^2 + a;$$

$$f''(x) = 6x.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$: $f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0$, per $x > 0$ la curva ha concavità verso l'alto, $f''(x) < 0 \Rightarrow 6x < 0$, per $x < 0$ la curva ha concavità verso il basso. È verificata quindi la condizione sufficiente di flesso nel punto $x = 0$ e, noto l'andamento della concavità nel dominio, esiste uno e un solo flesso di coordinate $F(0; b)$. Verifichiamo la simmetria centrale della curva rispetto ad F trasformando l'equazione secondo le corrispondenti trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = 2 \cdot 0 - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}.$$

Sostituiamo in $y = x^3 + ax + b$:

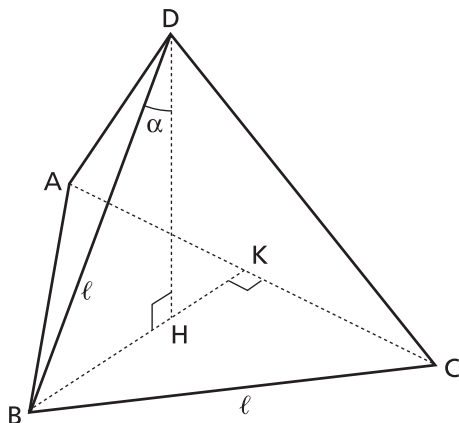
$$2b - y' = (-x')^3 - ax' + b \Rightarrow y' = (x')^3 + ax' + b.$$

Pertanto la curva è simmetrica rispetto al suo punto di flesso $F(0; b)$.

Clicca qui per guardare l'immagine su MATUTOR!

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

È dato il tetraedro regolare di vertici $ABCD$, altezza $DH = h$ e spigolo ℓ . Sia α l'angolo



$B\hat{D}H$, formato dallo spigolo BD e dall'altezza DH . Poiché il tetraedro regolare è una piramide retta, il piede H dell'altezza coincide con l'incentro del triangolo equilatero ABC , che è anche baricentro e ortocentro, e divide l'altezza BK del triangolo in due parti, una doppia dell'altra. Dalla geometria del triangolo equilatero risulta:

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \Rightarrow BH = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell.$$

Applichiamo il teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria al triangolo BHD per determinare l'ampiezza dell'angolo α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{BH}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 35,26^\circ.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Sia $P(A)$ la probabilità che il pezzo sia prodotto nello stabilimento A . Sia $P(B)$ la probabilità che il pezzo sia prodotto nello stabilimento B . Sia $P(C)$ la probabilità che il pezzo sia prodotto nello stabilimento C . Sia $P(dif)$ la probabilità che il pezzo sia difettoso. Chiaramente,

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Per il teorema della probabilità totale,

$$P(dif) = P(dif|A)P(A) + P(dif|B)P(B) + P(dif|C)P(C) = \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{6} \simeq 0,0817.$$

Per il teorema di Bayes si ha

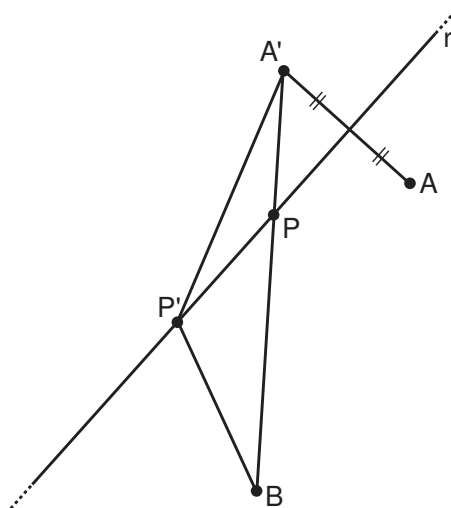
$$P(dif|A) = \frac{P(dif|A)P(A)}{P(dif)} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{0,0817} \simeq 0,612.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Prima di tutto osserviamo che il cammino minimo che congiunge A e B è una spezzata composta da due segmenti. Questo perchè

1. i cammini che minimizzano le distanze sono segmenti;
2. qualunque cammino che congiunga A e B toccando r si può scrivere come l'unione di due cammini, il primo congiungente A ed r , il secondo congiungente r e B ;
3. ognuno dei due cammini appena introdotti è minimo se e solo se è un segmento.

I Metodo: Sia A' il punto simmetrico di A rispetto alla retta r . Consideriamo il segmento $A'B$. Tale segmento interseca la retta r in un punto P poiché A' e B appartengono a semipiani diversi rispetto ad r . Dimostriamo che P è il punto che realizza il cammino che cerchiamo. Se con P' denotiamo un arbitrario punto della retta (dove $P' \neq P$), considerando il triangolo non degenere $A'P'B$, vale che $A'P' + BP' > A'B$.

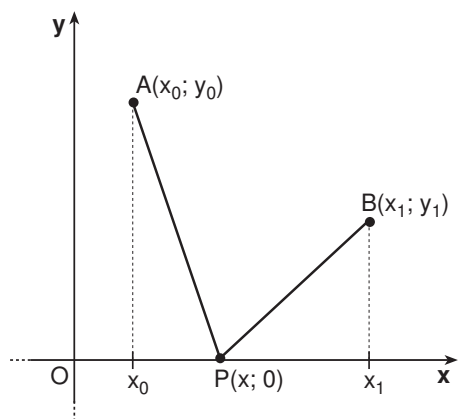


[Clicca qui per guardare l'animazione su MATUTOR!](#)

II Metodo: Per semplicità nei calcoli, possiamo considerare come retta l'asse delle x di equazione $y = 0$. Un generico punto P su tale retta avrà dunque coordinate $P(x; 0)$. Possiamo limitarci a considerare i punti $A(x_0; y_0)$ e $B(x_1; y_1)$ con $y_0 > 0$, $y_1 > 0$ (si potrebbe ragionare analogamente se fosse $y_0 < 0$ e $y_1 < 0$). Possiamo anche ipotizzare che $x_0 < x < x_1$.

Sia $f(x) = d(A, P) + d(B, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}$.

Cerchiamo un punto P di coordinate $P(x; 0)$ per cui $f(x)$ assuma valore minimo. Studiamo dunque la derivata prima di $f(x)$.



$$f'(x) = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}} + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} \geq -(x - x_1)\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Poiché abbiamo assunto $x_0 < x < x_1$, ne consegue che entrambi i membri dell'ultima disequazione sono positivi. Elevandoli al quadrato si ottiene

$$(x - x_0)^2 [(x - x_1)^2 + y_1^2] \geq (x_1 - x)^2 [(x - x_0)^2 + y_0^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 + (x - x_0)^2 y_1^2 \geq (x_1 - x)^2 (x - x_0)^2 + (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 y_1^2 \geq (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow$$

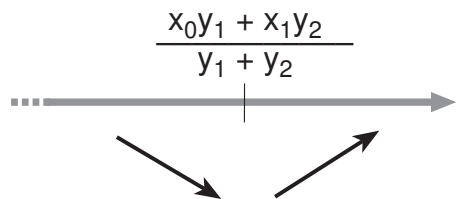
$$\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 \geq \left(\frac{x_1 - x}{x - x_0}\right)^2.$$

Poichè $y_0, y_1 > 0$ e $x_0 < x < x_1$ vale che $\frac{y_1}{y_0} > 0$ e $\frac{x_1 - x}{x - x_0} > 0$, e dunque si ha che

$$\frac{y_1}{y_0} \geq \frac{x_1 - x}{x - x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1 x - x_0 y_1 \geq x_1 y_0 - x y_0 \Leftrightarrow$$

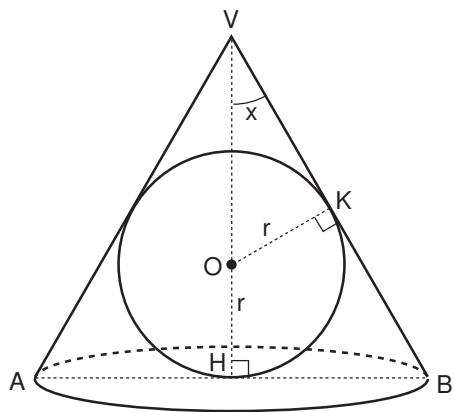
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}.$$



Il cammino cercato è quindi dato dall'unione dei segmenti AP e PB , dove P ha coordinate $P\left(\frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}; 0\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Consideriamo la sfera di centro O , raggio $r = OK = OH$ e il cono circoscritto di vertice



V e raggio di base BH . Poniamo $x = \widehat{HVB}$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Applichiamo al triangolo rettangolo VOK il teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria:

$$VO = \frac{OK}{\sin x} = \frac{r}{\sin x}.$$

Segue che

$$VH = VO + OH = \frac{r}{\sin x} + r = \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x}.$$

Analogamente, considerando il triangolo rettangolo VHB , si ricava:

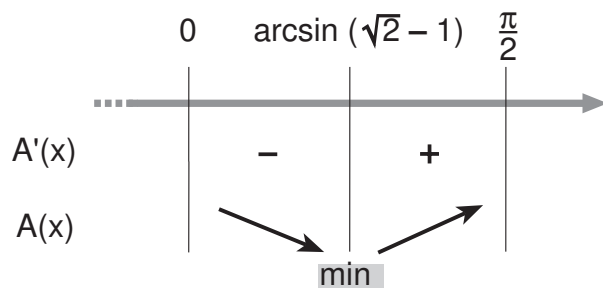
$$HB = VH \cdot \tan x = \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{r(1 + \sin x)}{\cos x}.$$

Determiniamo l'area laterale $A(x)$ del cono, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$A(x) = \pi \cdot HB \cdot VB = \pi \cdot \frac{r(1 + \sin x)}{\cos x} \cdot \frac{r(1 + \sin x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\pi r^2 (1 + \sin x)^2}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \frac{\pi r^2 (1 + \sin x)}{\sin x - \sin^2 x}.$$

Calcoliamo la derivata $A'(x)$ e studiamone il segno:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \pi r^2 \cdot \frac{\cos x (\sin x - \sin^2 x) - (1 + \sin x)(\cos x - 2 \sin x \cos x)}{(\sin x - \sin^2 x)^2} = \\ &= \pi r^2 \cdot \frac{\cos x (\sin x - \sin^2 x - 1 + 2 \sin x - \sin x + 2 \sin^2 x)}{(\sin x - \sin^2 x)^2} = \\ &= \pi r^2 \cdot \frac{\cos x (\sin^2 x + 2 \sin x - 1)}{(\sin x - \sin^2 x)^2}. \end{aligned}$$



Nell'intervallo $]0, \frac{\pi}{2}[$ risulta $A'(x) > 0$ per $\sqrt{2} - 1 < \sin x < 1$, ovvero $\arcsin(\sqrt{2} - 1) < x < \frac{\pi}{2}$. La funzione $A(x)$ ha minimo per $x = \arcsin(\sqrt{2} - 1)$; in tal caso risulta

$$VO = \frac{r}{\sqrt{2} - 1} = r(\sqrt{2} + 1).$$

Ricaviamo VT ovvero la distanza dal vertice V dalla superficie sferica:

$$VT = VO - TO = r(\sqrt{2} + 1) - r = r\sqrt{2}.$$

A. S. 2012-2013

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

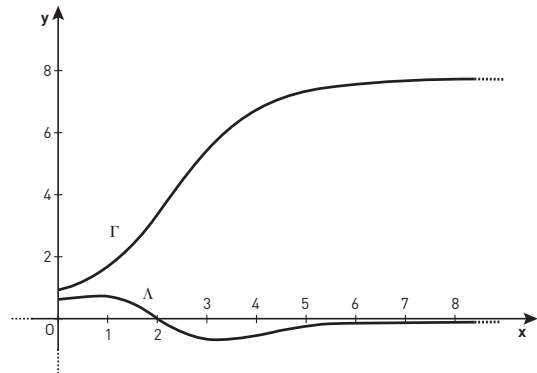
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$, passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ , rispettivamente.

1. Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è $f''(x) \leq f'(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?

2. Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?



3. Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.
4. Nell'ipotesi del punto 3., si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0, 2]$.

¹Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy ; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x . Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y , passante per l'origine e tangente a γ in P .
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0, 1]$. Si calcoli l'area di R , illustrando il ragionamento seguito e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$.

QUESTIONARIO

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?
3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A .
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a , b e h , illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge “*se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell’1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)*”. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?
7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?
8. Si mostri, senza usare il teorema di *l’Hôpital*, che:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi} = -1.$$

9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l’equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all’intervallo $[0, 3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

1. La condizione per la presenza di un punto x_0 di massimo o di minimo per una funzione continua e derivabile è che la sua derivata prima si annulli in x_0 e che cambi di segno in un intorno di x_0 .

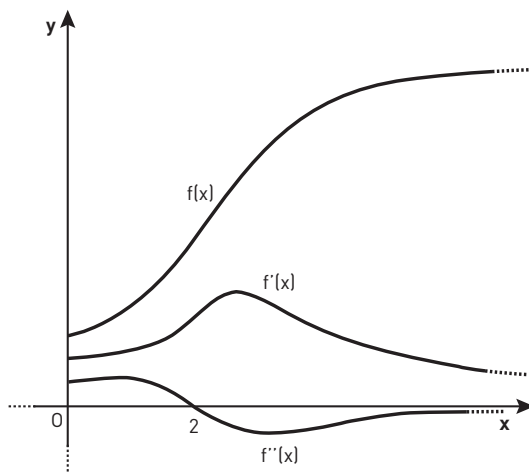
La derivata della funzione $f'(x)$ è $f''(x)$, cioè il grafico Λ che si annulla nel punto $x = 2$. Per stabilire se il punto $x = 2$ è un massimo o un minimo si deve esaminare il segno di $f''(x)$ in un intorno sinistro e destro di 2. Nell'intorno sinistro di 2 è $f''(x) > 0$, quindi $f'(x)$ è crescente per $0 < x < 2$. Viceversa per $x > 2$ si ha $f''(x) < 0$ e di conseguenza $f'(x)$ è decrescente per quei valori.

$x = 2$ è quindi un massimo di $f'(x)$.

Il valore di $f'(2)$ è la pendenza della retta tangente al grafico Γ di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 2$. La tangente a Γ nel punto $(2; 4)$ passa anche per l'origine, quindi la sua equazione è $y = 2x$. La pendenza è 2, quindi le coordinate del massimo di $f'(x)$ sono $(2; 2)$.

Dal grafico Γ si deduce che $f(x)$ è sempre crescente e che $f'(x) > 0$ per $x \in [0; +\infty[$. La funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale, di conseguenza la retta tangente a $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ ha coefficiente angolare che tende a 0. Perciò $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Un possibile grafico di $f'(x)$, ricordando che $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ per $x \in [0; +\infty[$ è quello rappresentato in figura.



2. Dal grafico di $f(x)$ si deduce un alto tasso di crescita iniziale che aumenta fino a quando la curva cambia la concavità (punto di flesso). Dal punto $x = 2$ la popolazione continua ad aumentare, ma a un tasso di crescita via via inferiore perché la sua derivata prima è sempre strettamente positiva ma tende a zero.

All'aumentare di x la popolazione si avvicina sempre più al valore 8 (senza mai raggiungerlo).

3. Per $f(x) = \frac{a}{1 + e^{b-x}}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1 + e^{b-x}} = \frac{a}{1 + 0} = 8$$

da cui segue che $a = 8$. Sappiamo inoltre che $f(2) = 4$, quindi

$$\frac{8}{1 + e^{b-2}} = 4 \Rightarrow 8 = 4 + 4e^{b-2} \Rightarrow 1 = e^{b-2} \Rightarrow \ln 1 = b - 2 \Rightarrow b = 2.$$

4. Dal punto 3 abbiamo $f(x) = \frac{8}{1 + e^{2-x}}$.

L'area delimitata da Λ e dall'asse x per $x \in [0; 2]$ è uguale a $\int_0^2 f''(x) dx$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $\int_0^2 f''(x) dx = f'(2) - f'(0)$, essendo $f'(x)$ una primitiva di $f''(x)$.

Conosciamo già $f'(2) = 2$; per trovare $f'(0)$ calcoliamo la derivata prima della $f(x)$:

$$f(x) = \frac{8}{1 + \frac{e^2}{e^x}} = \frac{8}{\frac{e^x + e^2}{e^x}} = \frac{8e^x}{e^x + e^2}$$

$$f'(x) = \frac{8e^x(e^x + e^2) - 8e^x e^x}{(e^x + e^2)^2} = \frac{8e^{2x} + 8e^{2+x} - 8e^{2x}}{(e^x + e^2)^2} = \frac{8e^{2+x}}{(e^x + e^2)^2}.$$

Quindi:

$$f'(0) = \frac{8e^2}{(e^2 + 1)^2}, \quad \int_0^2 f''(x) dx = 2 - \frac{8}{e^2} = 2 - \frac{8e^2}{(e^2 + 1)^2}.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2013

1. La funzione data: $f(x) = x^3 \ln x$ è definita per $x > 0$. Il dominio della funzione è $D_f =]0, +\infty[$.

Cerchiamo le eventuali simmetrie della funzione. Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non è né pari né dispari.

Cerchiamo ora eventuali intersezioni della funzione con gli assi.

Osserviamo che il grafico della funzione non interseca l'asse y visto che $x = 0$ non appartiene al dominio.

Studiamo le intersezioni con l'asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Il grafico della funzione interseca l'asse x nel punto di coordinate $P(1;0)$.

Studiamo il segno della funzione:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 \ln x > 0.$$

Quindi:

$$\begin{cases} x^3 > 0 \Rightarrow x > 0, \\ \ln x > 0 \Rightarrow x > 1. \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^3 < 0 \Rightarrow x < 0, \\ \ln x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1. \end{cases}$$

Considerando che il secondo sistema non ammette soluzioni, compiliamo il quadro dei segni.

La funzione assume valori positivi per $x > 1$, valori negativi per $0 < x < 1$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x.$

	0	1	
.....			
x^3	+	+	+
$\ln x$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$; risolviamolo applicando il teorema di De L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(-\frac{x^4}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

Allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln x = +\infty$. Quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Ricerchiamo l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty.$$

Ne deduciamo che la funzione non presenta asintoti di alcun tipo.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1).$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

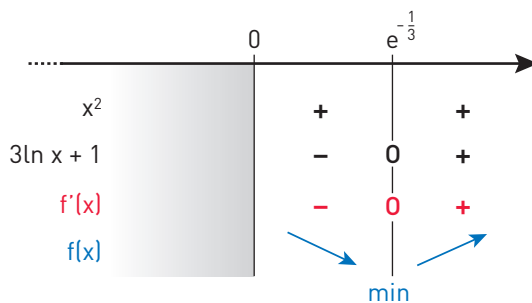
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3 \ln x + 1) > 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ 3 \ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -\frac{1}{3} \Rightarrow x > e^{-\frac{1}{3}}. \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 < 0, \\ 3 \ln x + 1 < 0. \end{cases}$$

Tenuto conto che il secondo sistema non ammette soluzioni, e per il primo sono accettabili solo quelle appartenenti al dominio di f , compiliamo il grafico dei segni.

La funzione è decrescente per $0 < x < e^{-\frac{1}{3}}$, crescente per $x > e^{-\frac{1}{3}}$, quindi ha un minimo assoluto per $x = e^{-\frac{1}{3}} \simeq 0,717$.



$$f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3e} \simeq -0,123.$$

Il punto di minimo della funzione ha coordinate $A\left(e^{-\frac{1}{3}}; -\frac{1}{3e}\right)$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 2x(3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6 \ln x + 5).$$

Studiamo il segno di $f''(x)$:

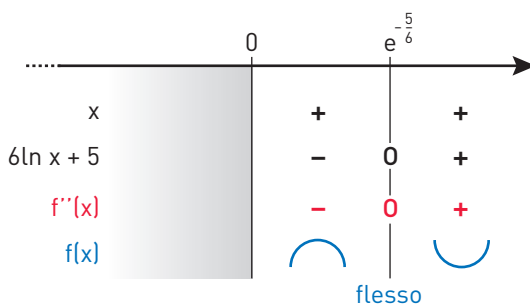
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(6 \ln x + 5) > 0.$$

Quindi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 6 \ln x + 5 > 0 \Rightarrow \ln x > -\frac{5}{6} \Rightarrow x > e^{-\frac{5}{6}}. \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 6 \ln x + 5 < 0. \end{cases}$$

Tenuto conto che solo il primo sistema ammette soluzioni, compiliamo il grafico dei segni.

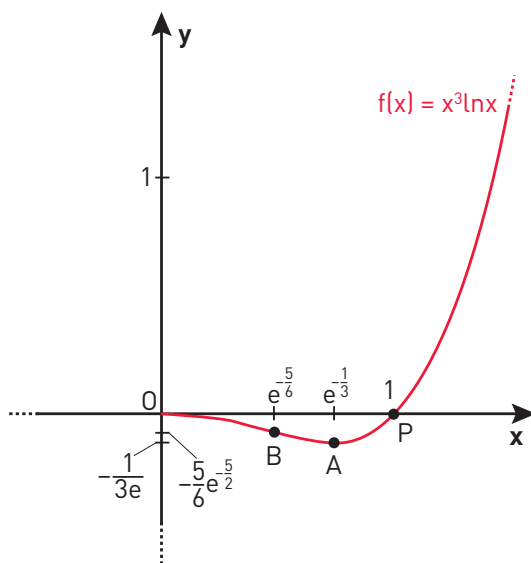
Il grafico della funzione ha la concavità verso il basso per $0 < x < e^{-\frac{5}{6}}$, verso l'alto per $x > e^{-\frac{5}{6}}$; ha un punto di flesso per $x = e^{-\frac{5}{6}} \simeq 0,435$.



$$f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = \left(e^{-\frac{5}{6}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}} \simeq -0,068.$$

Il punto di flesso della funzione ha coordinate $B\left(e^{-\frac{5}{6}}; -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.

Tracciamo il grafico probabile della funzione.



2. L'equazione della generica parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate è:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Imponiamo il passaggio per $P(1;0)$ e per l'origine $O(0;0)$:

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -a \\ 0 = c \end{cases}.$$

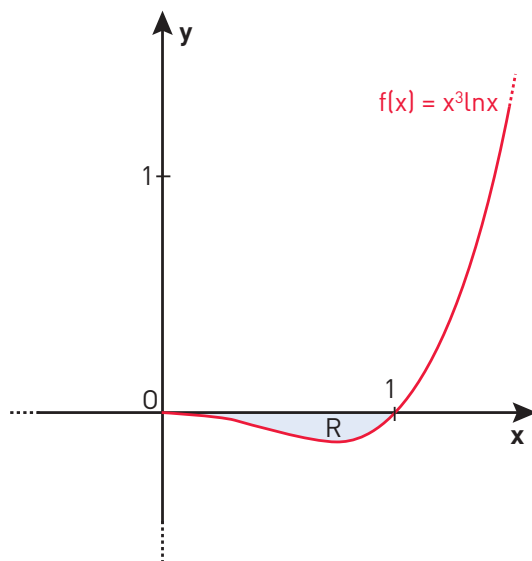
L'equazione della parabola cercata è del tipo $y = ax^2 - ax$. Il grafico γ della funzione e la parabola hanno la stessa retta tangente in $P(1;0)$. Calcoliamo i coefficienti angolari di queste rette tangenti e uguagliamoli:

- per la funzione $f(x)$: $y' = x^2(3 \ln x + 1) \rightarrow y'(1) = 1(3 \ln 1 + 1) = 1$;
- per la parabola: $y' = 2ax - a \rightarrow y'(1) = 2a \cdot 1 - a = a$.

Uguagliamo i valori: $1 = a$.

La parabola ha equazione: $y = x^2 - x$.

3. Disegniamo la regione di cui vogliamo calcolare l'area.



L'area della regione R è data da:

$$\mathcal{A}(R) = - \int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 x^3 \ln x dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito, applicando il teorema di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x dx &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c.\end{aligned}$$

La funzione $f(x)$ non è definita in $x = 0$, quindi l'integrale definito in $[0; 1]$ è un integrale improprio. Calcoliamolo mediante il limite:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \ln x dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x^3 \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} \right]_t^1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(0 - \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{t^4}{4} \ln t - \frac{t^4}{16} \right) \right] = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

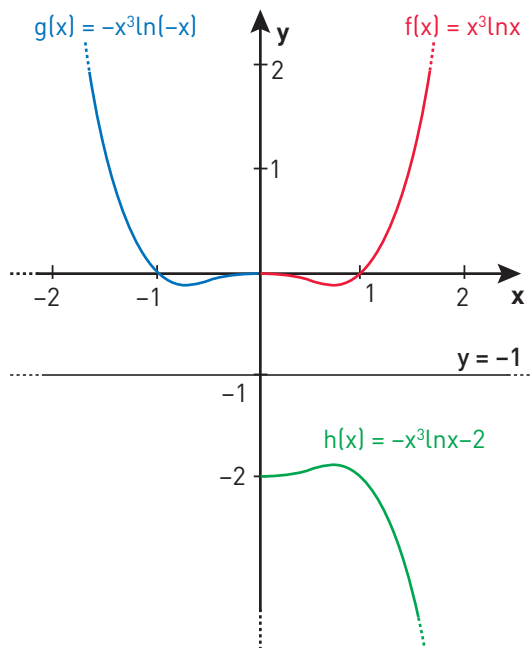
La misura dell'area della regione R è quindi uguale a:

$$\mathcal{A}(R) = - \left(-\frac{1}{16} \right) = \frac{1}{16}.$$

Questo valore è espresso in dm^2 ; convertiamolo in mm^2 :

$$\mathcal{A}(R) = \frac{1}{16} \text{dm}^2 = \frac{1}{16} 10^4 \text{mm}^2 = 625 \text{mm}^2.$$

4. Disegniamo la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e la curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.



Determiniamo l'equazione della curva γ_1 simmetrica di γ rispetto all'asse y .

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \rightarrow y' = (-x')^3 \ln(-x'), \quad \text{con } x' < 0.$$

Togliamo gli apici e troviamo l'equazione di γ_1 :

$$g(x) = -x^3 \ln(-x), \quad \text{con } x < 0.$$

Determiniamo l'equazione della curva γ_2 simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' - 2 \end{cases} \rightarrow -y' - 2 = (x')^3 \ln x' \rightarrow y' = -(x')^3 \ln x' - 2.$$

Togliamo gli apici e troviamo l'equazione di γ_2 :

$$h(x) = -x^3 \ln x - 2, \quad \text{con } x > 0.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso. Possiamo invertire la formula per ricavare il seno dell'angolo compreso tra i due lati noti:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2A}{ab} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1.$$

Dunque l'angolo compreso tra i due lati è retto e il triangolo è rettangolo. Possiamo quindi ricavare la misura del terzo lato con il teorema di Pitagora:

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

In alternativa, si può ottenere la stessa soluzione ricorrendo alla formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

detta A l'area del triangolo, p il suo semiperimetro e a , b e c i tre lati. Detto $c = x$ il lato incognito, sostituiamo i dati nella formula e otteniamo:

$$3 = \sqrt{\left(\frac{5+x}{2}\right) \left(\frac{5+x}{2} - 2\right) \left(\frac{5+x}{2} - 3\right) \left(\frac{5+x}{2} - x\right)}$$

$$3 = \sqrt{\left(\frac{5+x}{2}\right) \left(\frac{1+x}{2}\right) \left(\frac{x-1}{2}\right) \left(\frac{5-x}{2}\right)}$$

$$9 = \left(\frac{25-x^2}{4}\right) \left(\frac{x^2-1}{4}\right)$$

$$x^4 - 26x^2 + 169 = 0$$

$$(x^2 - 13)^2 = 0$$

che porta all'unica soluzione accettabile $x = \sqrt{13}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Consideriamo le funzioni $g(x) \stackrel{def}{=} f(x) - f(2x)$ e $h(x) \stackrel{def}{=} f(x) - f(4x)$. Le loro derivate, ottenute applicando le regole di derivazione di somma e composizione di funzioni, sono

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'(x) - 2f'(2x) \\h'(x) &= f'(x) - 4f'(4x).\end{aligned}$$

(In questa scrittura, come nel seguito della risoluzione, denotiamo per brevità con f' la derivata della funzione f .)

Le ipotesi del problema possono allora essere scritte come il sistema:

$$\begin{cases} g'(1) = 5 \\ g'(2) = 7 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7. \end{cases}$$

Se sommiamo alla prima equazione del sistema quella ottenuta moltiplicando per 2 ambo i membri della seconda, otteniamo:

$$f'(1) - 2f'(2) + 2[f'(2) - 2f'(4)] = 5 + 2 \cdot 7$$

cioè

$$f'(1) - 2f'(2) + 2f'(2) - 4f'(4) = 19,$$

da cui

$$f'(1) - 4f'(4) = 19.$$

Osservando che $f'(1) - 4f'(4)$ è proprio $h'(1)$, possiamo concludere che la derivata di $f'(x) - 4f'(4x)$ in $x = 1$ è uguale a 19.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Dati i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$ in un sistema cartesiano ortogonale, tracciamo il segmento AB . Determiniamo poi la retta r passante per B e perpendicolare ad AB :

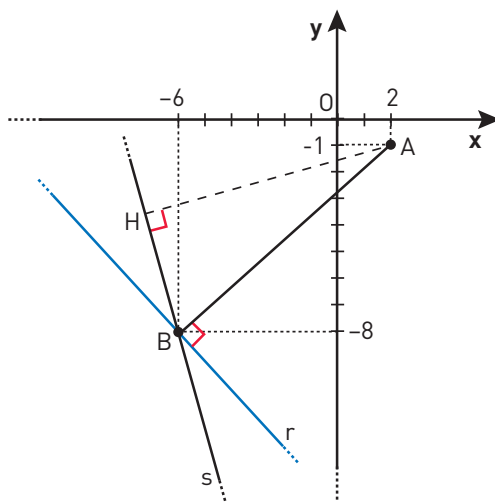
$$y - y_B = -\frac{1}{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}(x - x_B)$$

cioè

$$y + 8 = -\frac{1}{\frac{-8+1}{-6-2}}(x + 6)$$

da cui $y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}$ o, equivalentemente, $8x + 7y + 104 = 0$.

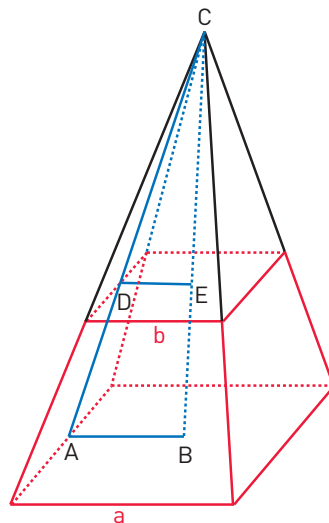
Tracciamo ora una generica retta s passante per B , distinta da r , e consideriamo la distanza AH , dove H è la proiezione ortogonale di A su s . Il triangolo ABH è rettangolo, con ipotenusa AB e cateto AH . Poiché $AB > AH$, allora AB è la distanza massima tra A e le rette passanti per B .



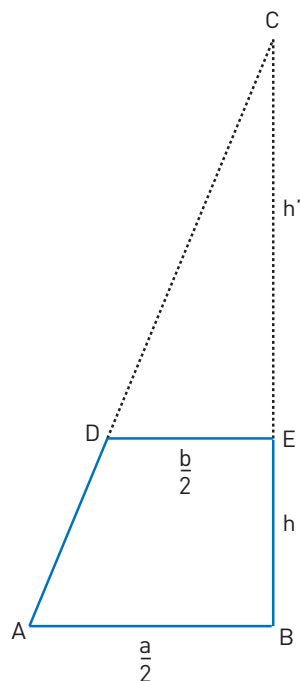
Si può quindi concludere che la retta per B avente massima distanza da A è la retta r .

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Sia T il tronco di piramide retta quadrata, di altezza h e lati di base a e b .



Consideriamo la sezione indicata nella figura sottostante.



I triangoli ABC e CDE sono simili perché rettangoli e con un angolo in comune. Dunque, considerando la notazione utilizzata nella figura, $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = (h + h') : h'$ e quindi

$$\frac{a}{2}h' = \frac{b}{2}h + \frac{b}{2}h'$$

$$h' = \frac{\frac{b}{2}h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{bh}{a-b}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P da cui il tronco è stato tagliato.

$$V_P = \frac{a^2(h + h')}{3} = \frac{a^2\left(h + \frac{bh}{a-b}\right)}{3} = \frac{a^2\frac{ah}{a-b}}{3} = \frac{a^3h}{3(a-b)}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P' di altezza h' , ottenuta sottraendo da P il tronco T :

$$V_{P'} = \frac{b^2h'}{3} = \frac{b^3h}{3(a-b)}$$

quindi il volume del tronco T si ricava facendo:

$$V_T = V_P - V_{P'} = \frac{h(a^3 - b^3)}{3(a-b)} = \frac{h(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3(a-b)} = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Si consideri un corpo che si dilata in tutte le direzioni di una certa percentuale λ , e si assuma che il corpo sia omogeneo e isotropo. Allora la dilatazione percentuale del volume del corpo è uguale a quella di una piccola porzione di tale corpo; consideriamo quindi una porzione assimilabile a un parallelepipedo di dimensioni a , b , c e di volume $V = abc$.

Consideriamo la dilatazione lungo le tre dimensioni:

$$\begin{cases} a' = a + \lambda \cdot a = a(1 + \lambda) \\ b' = b + \lambda \cdot b = b(1 + \lambda) \\ c' = c + \lambda \cdot c = c(1 + \lambda) \end{cases} .$$

Il parallelepipedo dilatato ha quindi volume pari a

$$V' = a'b'c' = abc(1 + \lambda)^3.$$

Calcoliamo l'incremento di volume:

$$\frac{V' - V}{V} = \frac{abc(1 + \lambda)^3 - abc}{abc} = (1 + \lambda)^3 - 1 = 1 + 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 - 1 = 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3.$$

Tenendo conto che λ è generalmente un valore molto piccolo (per esempio, $\lambda = 0,38\%$) è possibile trascurare i termini di secondo e terzo grado (λ^2 e λ^3). Pertanto, $\frac{V' - V}{V} \simeq 3\lambda$. Si conclude allora che il corpo si accresce in volume in proporzione tripla.

Analogamente, si dimostra che la superficie del corpo si accresce in proporzione doppia. Infatti, si consideri una superficie rettangolare di lati a e b . Risulta:

$$S = ab, \quad S' = a'b' = ab(1 + \lambda)^2.$$

Calcolando l'incremento della superficie, si ottiene:

$$\frac{S' - S}{S} = \frac{ab(1 + \lambda)^2 - ab}{ab} = (1 + \lambda)^2 - 1 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 2\lambda + \lambda^2 \simeq 2\lambda.$$

Anche qui l'approssimazione è valida nel caso in cui λ sia piccolo.

Si conclude allora che il corpo si accresce in superficie in proporzione doppia.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 6 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013</p>

Il numero che occupa la posizione 5036 nella lista in ordine crescente è quello che occupa la posizione 5 nella lista in ordine decrescente. Tra i 5040 numeri che si possono formare come indicato nel quesito, i primi 5 scritti in ordine decrescente sono:

Numero 1 (5040): 7 654 321

Numero 2 (5039): 7 654 312

Numero 3 (5038): 7 654 231

Numero 4 (5037): 7 654 213

Numero 5 (5036): 7 654 132

Il numero di posizione 5036 è quindi 7 654 132.

Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che $1441 = 2 \cdot 720 + 1 = 2 \cdot 6! + 1$, e ricordiamo che $720 = 6!$ è il numero di permutazioni di sei oggetti.

Se disponiamo in ordine crescente i numeri formati dalle cifre $\{1, \dots, 7\}$, allora i primi $6! = 720$ hanno come prima cifra 1, mentre le cifre rimanenti sono una permutazione di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

I successivi 720 numeri, cioè quelli dalla posizione 721 alla 1440, hanno come prima cifra 2, mentre le cifre rimanenti sono una permutazione di $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Il numero immediatamente successivo, cioè il 1441-esimo, è il minimo numero che ha come prima cifra 3, ovvero 3 124 567.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

La probabilità di scegliere casualmente due persone che non abbiano gli occhi azzurri può essere espressa come composizione di p_1 per p_2 , dove:

- p_1 è la probabilità che la prima persona scelta non abbia gli occhi azzurri;
- p_2 è la probabilità che la seconda persona scelta non abbia gli occhi azzurri.

Poiché le persone con gli occhi azzurri sono sei su dieci, $p_1 = \frac{4}{10}$.

Una volta estratta una persona con gli occhi non azzurri, il rimanente gruppo si compone di 9 persone, di cui 6 hanno gli occhi azzurri. Dunque $p_2 = \frac{3}{9}$.

Ne concludiamo che $p = p_1 * p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

In termini equivalenti, possiamo esprimere p in forma percentuale: $\frac{12}{90} = 13,3\%$.

Il quesito può essere risolto anche con un procedimento diverso, basato sul concetto di combinazione.

Il numero di tutte le possibili coppie di persone che si possono selezionare dal gruppo è infatti dato dalle combinazioni semplici di 10 oggetti presi a 2 a 2, vale a dire

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Tra queste, il numero di coppie di persone senza occhi azzurri è dato dalle combinazioni semplici di 4 oggetti presi a 2 a 2, cioè

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Poiché la selezione è casuale, tutti i casi si possono considerare equiprobabili, e si può applicare la definizione classica di probabilità:

$$p = \frac{\text{numero di coppie senza occhi azzurri}}{\text{numero totale delle coppie}} = \frac{C_{4,2}}{C_{10,2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} = 0,1\bar{3}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi}$$

è il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ calcolato in $x = \pi$ e corrisponde quindi alla derivata in quel punto. La funzione $f(x)$ è continua e derivabile per ogni x reale. Si ha:

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x.$$

In $x = \pi$, vale $f'(\pi) = e^{\operatorname{sen} \pi} \cos \pi = -1$, che corrisponde dunque al limite richiesto.

In alternativa, si può ottenere la stessa soluzione procedendo per sostituzione. Ponendo $y = x - \pi$, e ricordando che $e^{\operatorname{sen} \pi} = e^0 = 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi+y)} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} y} - 1}{-\operatorname{sen} y} \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Ha ragione Luisa: esistono più numeri irrazionali che razionali.

Il modo rigoroso di confrontare due insiemi infiniti A e B è quello di considerare opportune corrispondenze (o meglio, funzioni) tra di essi:

- si può dire che A e B *hanno lo stesso numero di elementi* (o che gli elementi di A sono *tanti quanti* quelli di B) se esiste una corrispondenza biunivoca (una funzione biettiva) tra A e B . Si dice anche che A ha *la stessa cardinalità* di B ;
- si dice invece che B ha *più elementi* di A se esiste una funzione iniettiva da A a B (elementi distinti di A hanno come immagine elementi distinti in B) ma non esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B . Si dice in questo caso che B ha *cardinalità maggiore* di A o che A ha *cardinalità minore* di B .

Si può vedere che l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali ha la stessa cardinalità dell'insieme \mathbb{N} dei naturali.

Chiaramente, i numeri razionali comprendono al loro interno tutti i naturali, quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; questo mostra che \mathbb{N} ha cardinalità inferiore a \mathbb{Q} .

Dimostriamo che esiste una funzione iniettiva che va da \mathbb{Q} a \mathbb{N} ; così facendo, dimostriamo che i due insiemi hanno la stessa cardinalità. Se infatti $a = \text{card}(\mathbb{N})$ e $b = \text{card}(\mathbb{Q})$, cerchiamo una funzione che provi che $a \geq b$; sappiamo già che $a \leq b$, quindi l'esistenza della funzione che cerchiamo prova che $a = b$.

Consideriamo una successione di coppie di naturali, ordinata secondo il seguente criterio: si dividono le coppie in gruppi in cui è costante la somma di termini. Ogni gruppo, che è finito, si ordina mettendo in ordine crescente i primi termini di tutte le coppie.

La successione si costruisce mettendo una dopo l'altra le coppie di ogni gruppo.

Questi sono i primi elementi della successione: $(1;1)$; $(1;2)$, $(2;1)$; $(1;3)$, $(2;2)$, $(3;1)$; $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$, $(4;1)$; ...

Ogni elemento della successione può essere messo in corrispondenza con l'indice della posizione che occupa all'interno della successione; questo vuol dire che esiste una funzione iniettiva $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da $(1;1) \mapsto 1$, $(1;2) \mapsto 2$, $(2;1) \mapsto 3$, $(3;1) \mapsto 4$...

Quindi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di \mathbb{N} .

Consideriamo adesso l'applicazione

$$\begin{aligned} i : \quad \mathbb{Q}^+ & \rightarrow \mathbb{N} \\ \frac{m}{n}, m, n \text{ primi tra loro} & \mapsto (m; n) \end{aligned}$$

La funzione i è ben definita, perché se $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ allora $i\left(\frac{m}{n}\right) = i\left(\frac{m'}{n'}\right)$. Inoltre, i è iniettiva, perché se $i\left(\frac{m}{n}\right) = i\left(\frac{m'}{n'}\right)$, ne deduciamo che $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Quindi \mathbb{Q}^+ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La stessa costruzione si può fare per \mathbb{Q}^- , che ha quindi la stessa cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ che è la stessa cardinalità di \mathbb{N} . Considerando che $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$, abbiamo dimostrato quel che volevamo provare.

D'altra parte, l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali ha una cardinalità strettamente maggiore di quella di \mathbb{N} , il che vuol dire che non è possibile costruire una successione ordinata che comprenda tutti i numeri reali. In effetti, non è possibile nemmeno ordinare in una successione tutti i numeri compresi tra 0 e 1. L'argomento per dimostrare questo, dovuto a Georg Cantor, è detto 'argomento diagonale', e procede per assurdo.

Supponiamo di aver trovato una successione ordinata che includa tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1. Indichiamo con a_{ij} la j -esima cifra dell' i -esimo numero di questa successione; i primi elementi saranno quindi $0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots$; $0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots$; $0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots$; \dots

Possiamo però trovare un altro numero, compreso tra 0 e 1, che non è compreso all'interno della successione, $b = 0, b_1b_2b_3 \dots$, in questo modo:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{se } 0 \leq a_{ii} < 9 \\ 0 & \text{se } a_{ii} = 9 \end{cases}$$

Il numero b non è nessuno di quelli presenti nella successione, perché differisce dal primo per la prima cifra, dal secondo per la seconda cifra, e in generale dall' i -esimo per l' i -esima cifra. Concludiamo pertanto che non è possibile mettere in corrispondenza \mathbb{N} con l'intervallo $[0,1]$; a maggior ragione, non è possibile farlo neppure con l'intero insieme \mathbb{R} .

I numeri irrazionali sono l'insieme differenza $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, che ha cardinalità maggiore di \mathbb{Q} . Se così non fosse, anche \mathbb{R} avrebbe la stessa cardinalità di \mathbb{Q} , perché $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$.

In conclusione, i numeri razionali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali, mentre gli irrazionali hanno cardinalità maggiore, la cardinalità di \mathbb{R} , e sono quindi più numerosi.

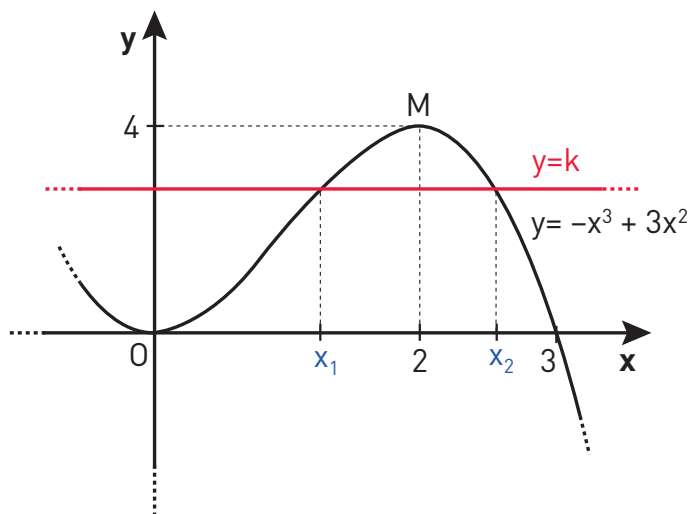
Ha quindi ragione Luisa, "esistono più numeri irrazionali che razionali".

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Data l'equazione $x^2(3-x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, si pongano entrambi i membri uguali a y e si vadano a studiare le intersezioni tra il fascio improprio di rette $y = k$ e il grafico della funzione cubica $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$. Tale funzione:

- si annulla nei punti $x = 0$ e $x = 3$;
- è positiva per $x < 3$ e negativa per $x > 3$;
- ha derivata prima $y' = -3x^2 + 6x$; essa si annulla per $x = 0$ e $x = 2$; $y' > 0$ per $0 < x < 2$, $y' < 0$ per $x < 0 \vee x > 2$, pertanto la funzione ha minimo in $x = 0$ con $f(0) = 0$ e massimo in $x = 2$ con $f(2) = 4$.

Consideriamo ora la generica retta $y = k$ e la funzione cubica nell'intervallo $[0; 3]$.



Osserviamo che esistono due intersezioni distinte per $0 < k < 4$ e quindi l'equazione di partenza $x^2(3-x) = k$ ammette due soluzioni distinte per $0 \leq k < 4$.

Posto $k = 3$ indichiamo con x_2 la soluzione maggiore dell'equazione $-x^3 + 3x = 3$. Considerata la funzione $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ e posto $x_2 = \bar{x}$, tale valore risulta l'unico zero per questa funzione nell'intervallo $[2; 3]$. La derivata prima è $g'(x) = 3x^2 - 6x$ e la derivata seconda $g''(x) = 6x - 6$. Essendo quest'ultima positiva nell'intervallo $[2; 3]$ possiamo applicare il metodo delle tangenti per ricavare un valore approssimato di \bar{x} .

Poiché $g(3) > 0$ poniamo $x_0 = 3$, sfruttiamo la seguente formula di ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 3}{3x_n^2 - 6x_n}$$

e compiliamo la tabella.

n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$
0	3	3	9
1	2,6667	0,6296	5,3333
2	2,5486	0,0680	4,1946
3	2,5324	0,0012	4,0447
4	2,5321	$4 \cdot 10^{-7}$	4,0419

Osservando la tabella assumiamo che il valore di x approssimato alla seconda cifra decimale è 2,53.

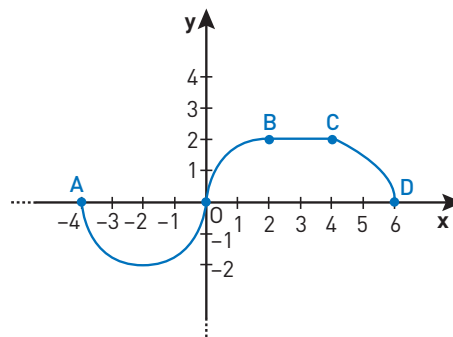
A. S. 2013-2014

<p style="text-align: center;">ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014</p>

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti scelti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4, 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(4; 2)$, $D(6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO , dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B , del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x .



1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A , O , B , C , D .
2. Posto $f(x) = \int_{-4}^x g(t)dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4, 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$.

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

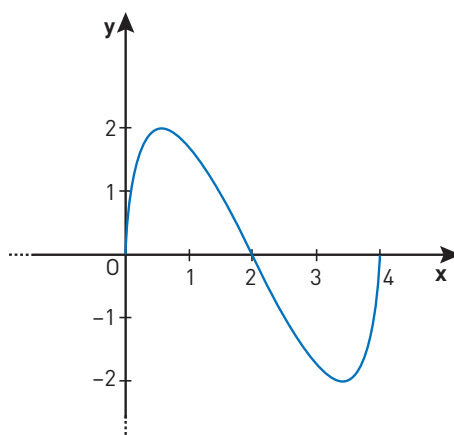
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano - lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

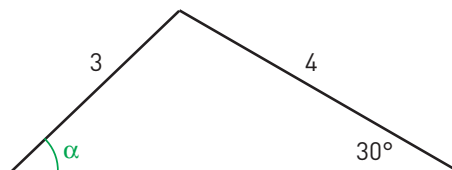
Sia $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$

1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2; 0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x .
2. Si dimostri che, qualunque sia t , $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x .
4. Sia $h(x) = \sin(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x)dx$?



QUESTIONARIO

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α ?



2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

- esattamente una pallina è rossa;
- le tre palline sono di colori differenti.

4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x , l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.
5. In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180° .
6. Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.
7. Se $f'(x) = \ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x , f ha un minimo relativo?
 (A) 5,146 (B) 3,146 (C) 1,000 (D) 0,159 (E) 0
8. La “zara” è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.
9. Le lettere \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo \aleph_0 (*aleph-zero*) indica la cardinalità di \mathbb{N} . Gli insiemi \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} hanno anch'essi cardinalità \aleph_0 ? Si motivi la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori reali di a e b , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + bx} - 2}{x} = 1$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

1. Determiniamo l'espressione analitica di $g(x)$ dividendo il suo dominio in intervalli.

- La circonferenza di diametro AO ha equazione

$$(x+2)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{-x^2 - 4x},$$

quindi nell'intervallo $x \in [-4; 0]$ $g(x)$ ha equazione $g(x) = -\sqrt{-x^2 - 4x}$, perché si trova nel semipiano $y \leq 0$.

- La circonferenza passante per O e B, di cui l'arco OB è un quarto di circonferenza, ha centro in $(2;0)$ ed equazione $(x-2)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{-x^2 + 4x}$, quindi nell'intervallo $x \in]0; 2]$ $g(x)$ ha equazione $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$, perché si trova nel semipiano $y \geq 0$.
- Il segmento BC ha equazione $y = 2$; pertanto nell'intervallo $x \in]2; 4]$ $g(x)$ ha equazione $g(x) = 2$.
- Una parabola avente per asse di simmetria l'asse x ha equazione $x = ay^2 + c$; imponendo le condizioni di passaggio per C e per D si ottiene $c = 6$ e $4 = 4a + 6 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$. Nell'intervallo $x \in]4; 6]$ la funzione $g(x)$ ha quindi equazione

$$g(x) = \sqrt{12 - 2x}$$

perché si trova nel semipiano $y \geq 0$.

Abbiamo pertanto

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2 - 4x} & \text{per } -4 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x^2 + 4x} & \text{per } 0 < x \leq 2 \\ 2 & \text{per } 2 < x \leq 4 \\ \sqrt{12 - 2x} & \text{per } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata $g'(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} & \text{per } -4 < x < 0 \\ \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x}} & \text{per } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{per } 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{\sqrt{12-2x}} & \text{per } 4 < x < 6 \end{cases}$$

inoltre:

- in A, poiché

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+2}{-x^2-4x} = -\infty$$

la funzione non è derivabile;

- in O, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = +\infty,$$

che equivale a dire

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = +\infty,$$

la funzione non è derivabile;

- in B, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^+} g'(x) = 0$$

e $g(x)$ è continua in $x = 2$, la funzione è derivabile con derivata 2;

- in C, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} g'(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 4^+} g'(x) = -\frac{1}{2},$$

la funzione non è derivabile;

- in D poiché

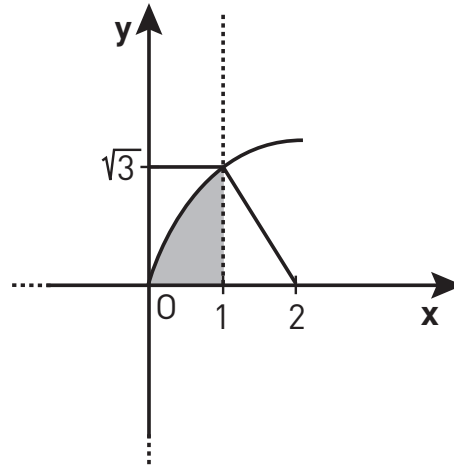
$$\lim_{x \rightarrow 6^-} g'(x) = -\infty$$

la funzione non è derivabile.

2. Calcoliamo i valori richiesti per $f(x) = \int_{-4}^x g(t)dt$.

- $f(-4) = \int_{-4}^{-4} f(t)dt = 0$;

- $f(0)$ corrisponde all'area della semicirconferenza di diametro AO, presa con segno negativo: $f(0) = -\frac{\pi \cdot 2^2}{2} = -2\pi$;
- $f(1)$ corrisponde a $f(0)$ a cui va sommata l'area del triangolo mistilineo compreso tra il quarto di circonferenza di centro (2;0) e passante per 0 e la retta $x = 1$.



Tale area è la differenza tra l'area del settore circolare di ampiezza $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e l'area di un triangolo rettangolo di cateti 1 e $\sqrt{3}$, quindi:

$$A = \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

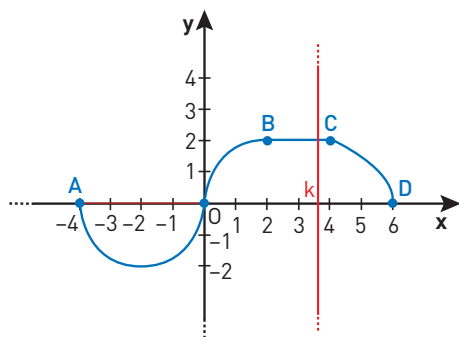
pertanto $f(1) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $f(2)$ corrisponde alla somma algebrica fra $f(0)$ e l'area del quarto di circonferenza, che è pari a $\frac{\pi 2^2}{4} = \pi$: $f(2) = 2\pi + \pi = -\pi$.
- $f(4)$ corrisponde al valore di $f(2)$ aggiungendo l'area del quadrato compreso tra il segmento BC e l'asse x , cioè $f(4) = f(2) + 2^2 = 4 - \pi$.
- $f(6)$ corrisponde al valore di $f(4)$ a cui va aggiunta l'area del segmento parabolico CD, che si può calcolare in diversi modi: per esempio, si può applicare il teorema di Archimede, e moltiplicare per $\frac{2}{3}$ l'area del quadrato circoscritto, ottenendo $\frac{2}{3} \cdot 2^2 = \frac{8}{3}$; equivalentemente, si può calcolare l'integrale definito

$$\int_4^6 \sqrt{12-2x} dx = \left[-\frac{(12-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_4^6 = 0 + \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{8}{3}.$$

Pertanto $f(6) = 4 - \pi + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} - \pi$.

3. Ricaviamo il segno di f riflettendo sul significato geometrico di integrale; per come sono definiti, $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ sono valori negativi mentre $f(4)$ e $f(6)$ sono valori positivi. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che $g = f'$; sappiamo inoltre che la funzione f è continua nell'intervallo $]2;4[$, pertanto sappiamo anche che avrà uno zero in quell'intervallo, cioè esiste un valore reale $k \in]2;4[$ per cui $f(k) = 0$. Ragioniamo graficamente per ricavare questo valore.



Sappiamo che $f(2) = -\pi$ e che

$$f(k) = f(2) + \int_2^k g(t) dt.$$

Poiché vogliamo che $f(k) = 0$, k deve soddisfare la condizione $\int_2^k g(t) dt = \pi$. Nell'intervallo $]2;4[$ che stiamo considerando $g(x)$ è la funzione costante di equazione $y = 2$; pertanto, come si vede bene dalla figura, quello che stiamo cercando è la lunghezza della base di un rettangolo che stia sotto il segmento BC, che abbia area π e altezza 2. Il valore che cerchiamo è quindi $\frac{\pi}{2}$; ne ricaviamo che $k = 2 + \frac{\pi}{2}$.

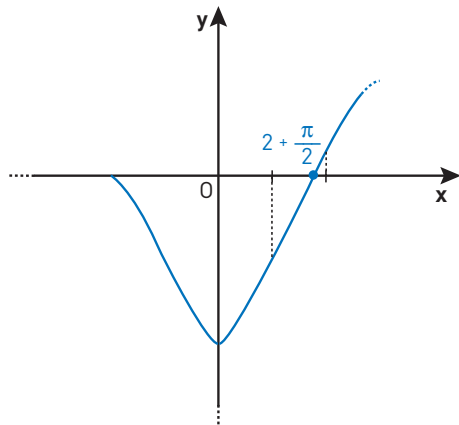
Ricapitolando:

- $f(x) = 0$ per $x = -4$ e $x = 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) < 0$ per $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) > 0$ per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo anche dire che $f''(x) = g'(x)$, quindi in base a quanto detto su g' sappiamo che

- $f''(x) < 0$ per $-4 < x < -2$ e $4 < x < 6$;
- $f''(x) > 0$ per $-2 < x < 0$ e $0 < x < 2$;
- $f''(x) = 0$ per $2 < x < 4$.

4. Essendo la funzione $f(x)$ continua sull'intervallo chiuso $[-4; 6]$, essa ammette un massimo e un minimo assoluti all'interno di questo intervallo per il teorema di Weierstrass. Come si deduce facilmente dal grafico di g e dai conti svolti fino a questo punto, nell'intervallo $[-4; 0[$ la funzione f è decrescente; il minimo assoluto si ha in $x = 0$, dove $f(0) = -2\pi$. Nell'intervallo $]0; 6]$ la funzione f è sempre crescente e il massimo assoluto di f sarà in $x = 6$, infatti $f(-4) = 0 < f(6) = \frac{20}{3} - \pi$. L'andamento qualitativo del grafico di f sarà quindi:



SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

1. Una funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al punto $(a; b)$ quando è unita rispetto alle equazioni della simmetria centrale e delle sue inverse:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

Nel nostro caso il centro è $(2; 0)$:

$$\begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Sostituiamo all'equazione $y = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$:

$$\begin{aligned} -y' &= [2 - (4 - x')]\sqrt{4(4 - x') - (4 - x')^2} \\ y' &= (2 - x')\sqrt{16 - 4x' - 16 - x'^2 + 8x'} \\ y' &= (2 - x')\sqrt{4x' - x'^2} \end{aligned}$$

La funzione è pertanto unita per tale trasformazione e il punto $(2; 0)$ è centro di simmetria del grafico Γ .

Calcoliamo la derivata prima $f'(x)$ nel punto $x = 2$; innanzitutto calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = -\sqrt{4x - x^2} + \frac{(2 - x)(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-4x + x^2 + 4 + x^2 - 4x}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2x^2 - 8x + 4}{\sqrt{4x - x^2}}$$

Sostituiamo a x il valore 2:

$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{\sqrt{8 - 4}} = \frac{-4}{2} = -2$$

La derivata prima in un punto di una funzione corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto. Tale coefficiente coincide con la tangente goniometrica dell'angolo α formato dalla retta col semiasse positivo delle x . Pertanto risulta:

$$\alpha = \arctg(-2) \simeq 116,5651^\circ \simeq 116^\circ 34'.$$

2. Consideriamo la funzione derivata prima $f'(x)$ e calcoliamo $f'(2+t)$ e $f'(2-t)$, con $0 < t < 2$:

$$f'(2+t) = \frac{2(2+t)^2 - 8(2+t) + 4}{\sqrt{4(2+t) - (t+2)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}}$$

$$f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2 - 8(2-t) + 4}{\sqrt{4(2-t) - (t-2)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}}$$

Poiché per qualsiasi t , con $0 < t < 2$, i valori di $f'(2+t)$ e $f'(2-t)$ coincidono, le rette tangenti a Γ in tali punti sono parallele.

Consideriamo ora le rette $21x + 10y + 31 = 0$ e $23x + 12y + 35 = 0$. Esse hanno coefficiente angolare rispettivamente $m_1 = -\frac{21}{10}$ e $m_2 = -\frac{23}{12}$, entrambi negativi.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 8x + 4}{\sqrt{4x - x^2}} > 0 \rightarrow 0 < x < 2 - \sqrt{2} \vee 2 + \sqrt{2} < x < 4$$

Pertanto la funzione $f'(x)$ risulta:

- positiva per $0 < x < 2 - \sqrt{2} \vee 2 + \sqrt{2} < x < 4$;
- negativa per $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$;
- nulla in $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$.

Inoltre, la funzione $f'(x)$ è strettamente decrescente in $[2 - \sqrt{2}; 2]$ in quanto la funzione $f(x)$ volge la concavità verso il basso in tale intervallo (come si evince dal grafico), con

$$f'(2 - \sqrt{2}) = 0 \text{ e } f'(2) = -2.$$

Analogamente, la funzione $f'(x)$ è strettamente crescente in $[2; 2 + \sqrt{2}]$ in quanto la funzione $f(x)$ volge la concavità verso l'alto in tale intervallo, con

$$f'(2) = -2 \text{ e } f'(2 + \sqrt{2}) = 0.$$

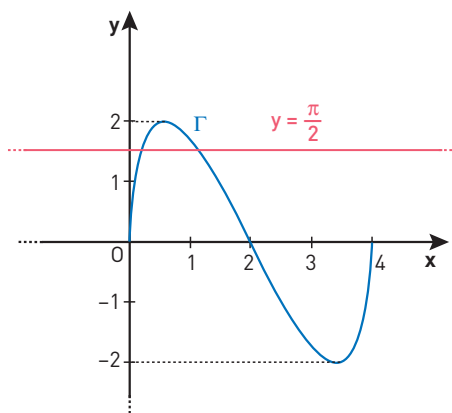
Quindi la funzione derivata $f'(x)$ assume valori negativi compresi tra $[-2; 0[$. Poiché $m_1 = -\frac{21}{10} = -2,1$ non appartiene a tale intervallo, non esiste una retta tangente a Γ parallela alla retta $21x + 10y + 31 = 0$. Invece $m_2 = -\frac{23}{12} \simeq -1,92$ appartiene all'intervallo $[-2; 0[$, perciò esistono due rette tangenti a Γ parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$.

3. Considerando la simmetria del grafico Γ dimostrata nel punto 1, l'area \mathcal{A} della regione compresa tra Γ e l'asse x è il doppio dell'integrale definito dalla funzione $f(x)$ calcolata in $[0; 2]$:

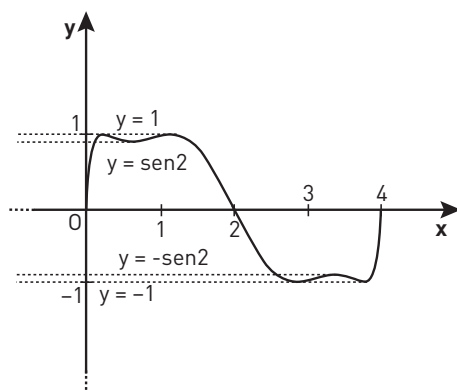
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 2 \cdot \int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2}dx = \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2}dx = \\ &= \left[\frac{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 0) = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

4. Sia $h(x) = \sin(f(x))$. Dal punto 2 risulta che $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$ sono estremanti della funzione $f(x)$ le cui immagini sono $f(2 - \sqrt{2}) = 2$ ed $f(2 + \sqrt{2}) = -2$. Il codominio della funzione $f(x)$ è $C = [-2; 2]$ in accordo con il grafico assegnato. Risulta che $\sin(f(x)) = 1$ se $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto l'unico valore accettabile si ha per $k = 0$, ovvero $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Osservando la figura che rappresenta $y = f(x)$ e $y = \frac{\pi}{2}$ se ne deduce che esistono due valori di x che soddisfano la richiesta.



Utilizzando le informazioni precedenti e tenendo conto della simmetria di $f(x)$ e del fatto che il seno è una funzione dispari, si può ipotizzare il seguente grafico qualitativo di $y = h(x)$.



Calcoliamo la derivata prima $h'(x)$:

$$h'(x) = \cos(f(x)) \cdot f'(x).$$

Gli estremi relativi vanno ricercati ponendo:

$$h'(x) = 0 \rightarrow \cos(f(x)) = 0 \vee f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = \pm \frac{\pi}{2} \vee x = 2 \pm \sqrt{2}.$$

In particolare:

- $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ per due valori di x , in corrispondenza dei quali $h(x) = -1$; la funzione $h(x)$ ha due punti di minimo assoluto;
- $x = 2 - \sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo e risulta $h(2 - \sqrt{2}) = \sin 2 \simeq 0,91$.

Osservando il grafico qualitativo $y = h(x)$ si può dedurre che una retta $y = k$ interseca il corrispondente grafico in quattro punti distinti se:

$$\sin 2 < k < 1 \vee -1 < k < -\sin 2$$

Tenendo conto del significato geometrico dell'integrale definito e della simmetria della funzione $h(x)$ rispetto al punto $(2; 0)$, risulta:

$$\int_0^4 h(x) dx = 0.$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 1 CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014</p>

Il teorema dei seni afferma che in un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti. Applicando questo teorema al triangolo in figura, otteniamo che

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin \alpha}$$

da cui si ricava

$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Utilizzando la calcolatrice, calcoliamo la misura dell'angolo α :

$$\alpha = \arcsin \frac{2}{3} \simeq 41,8103149^\circ \simeq 41^\circ 49'$$

<p>SOLUZIONE DEL QUESITO 2</p> <p>CORSO SPERIMENTALE PNI 2014</p>

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Inoltre, per un noto teorema di geometria solida, in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore strettamente di 360° . Se le facce del poligono regolare sono esagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 120° , quindi non si possono avere poliedri le cui facce siano esagoni perché la somma degli angoli di tre facce è 360° , il che è impossibile.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

Nel primo caso dobbiamo calcolare la probabilità che esattamente una pallina sia rossa. Le tre estrazioni sono eventi dipendenti in quanto non c'è reimmissione (e quindi la composizione dell'urna cambia). La pallina rossa potrà essere pescata alla prima estrazione, alla seconda oppure alla terza. Consideriamo i seguenti eventi:

E = “viene estratta esattamente una pallina rossa”

E_1 = “la pallina rossa viene pescata alla prima estrazione”

E_2 = “la pallina rossa viene pescata alla seconda estrazione”

E_3 = “la pallina rossa viene pescata alla terza estrazione”

Calcoliamo $P(E_1)$:

$$P(E_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{1050}{6840} = \frac{35}{228}$$

Calcoliamo $P(E_2)$:

$$P(E_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{1050}{6840} = \frac{35}{228}$$

Calcoliamo $P(E_3)$:

$$P(E_3) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{1050}{6840} = \frac{35}{228}$$

Quindi

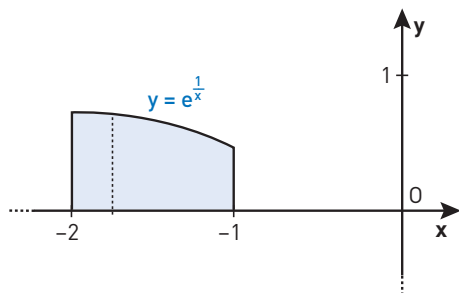
$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{105}{228} = \frac{35}{76} \simeq 0,4605.$$

Ora calcoliamo la probabilità che le tre palline estratte siano di colori differenti. In questo caso alla prima estrazione possiamo pescare una pallina di qualsiasi colore. Alla seconda estrazione possiamo pescare una pallina di qualsiasi colore eccetto quello della prima pallina (e dobbiamo ricordarci che il numero di palline nell'urna è diminuito di uno perché non si effettuano reimbussolamenti). Alla terza estrazione infine possiamo estrarre una pallina di un colore che sia diverso dai colori delle due palline precedentemente estratte (e ancora una volta dobbiamo ricordarci che il numero di palline nell'urna è diminuito di uno). Quindi

$$\begin{aligned} P(\text{“le tre palline sono di colori differenti”}) &= 1 \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18} = \\ &= \frac{150}{342} = \frac{25}{57} \simeq 0,4386. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

Nella figura è riportata la regione R di piano compresa tra il grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e l'asse x , con $-2 \leq x \leq -1$.



Il solido Ω con base R ha come sezioni perpendicolari all'asse x rettangoli con altezza definita dalla funzione $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Il volume V del solido Ω può quindi essere visto come la somma integrale di parallelepipedi la cui area di base è $e^{\frac{1}{x}}dx$ e l'altezza è $\frac{1}{x^2}$:

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx.$$

Risolviamo l'integrale:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = - \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= - \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_{-2}^{-1} = - \left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

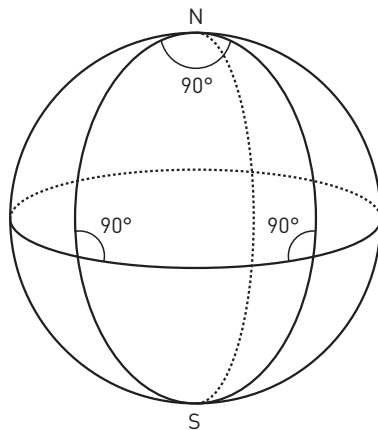
SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

Forniamo due esempi, uno dalla geometria sferica e uno dalla geometria iperbolica.

Nella geometria sferica, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180° .

Costruiamo esplicitamente un esempio di triangolo in cui la somma degli angoli è 270° .

Consideriamo un punto N e il suo antipodo S , che chiamiamo polo nord e polo sud. Consideriamo due cerchi massimi per i poli, che siano perpendicolari tra loro, che chiameremo meridiani principali. Sezionando la sfera con un piano equidistante dai due poli, otteniamo un terzo cerchio massimo, che chiamiamo equatore, perpendicolare agli altri due cerchi massimi. In questo modo si formano 8 triangoli congruenti, ciascuno dei quali ha somma degli angoli interni uguale a 270° , come in figura:



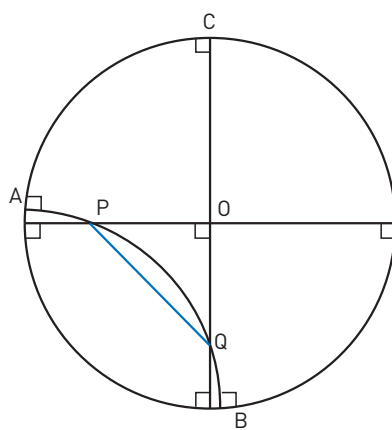
Nella geometria iperbolica ogni triangolo ha somma degli angoli minore di 180° .

Costruiamo esplicitamente un esempio di triangolo nel disco di Poincaré, un modello per la geometria iperbolica in cui le rette sono i diametri e gli archi di circonferenza perpendicolari al bordo del disco.

Scegliamo due rette perpendicolari qualsiasi, rappresentate da due diametri del disco. Tali rette si intersecano nel centro O del disco, e sono tra loro perpendicolari.

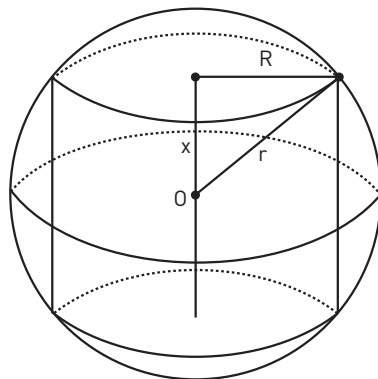
Come terza retta scegliamo una qualunque retta iperbolica AB che intersechi le altre due in P e Q come in figura.

La somma degli angoli interni del triangolo iperbolico POQ è minore della somma di quelli del triangolo euclideo POQ , e quindi minore di 180° . Nota bene che il segmento euclideo PQ è evidenziato in blu perchè *non* è un segmento di retta nel piano iperbolico!



SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

Nella figura abbiamo indicato con x la metà dell'altezza del cilindro. Di conseguenza, la base circolare del cilindro ha raggio $R = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3 - x^2}$.



Il volume del cilindro è dato dalla funzione f :

$$f(x) = 2x \cdot \pi R^2 = 2\pi x(3 - x^2) = 2\pi(3x - x^3).$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 2\pi(3 - 3x^2) = 6\pi(1 - x^2),$$

e troviamo gli zeri:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

L'unica soluzione che ha geometricamente senso è $x = 1$.

Per capire se è un massimo o un minimo è sufficiente confrontare $f(1)$, il volume nel caso $x = 1$, con f valutata in un qualunque altro punto di $[0, \sqrt{3}]$. Scegliamo ad esempio $\frac{1}{2}$ e otteniamo

$$f(1) = 4\pi > \frac{11}{4}\pi = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

quindi $x = 1$ è il punto di massimo.

Sostituendo il valore $x = 1$, l'altezza $h = 2x$ e il raggio $R = \sqrt{3 - x^2}$ del cilindro diventano:

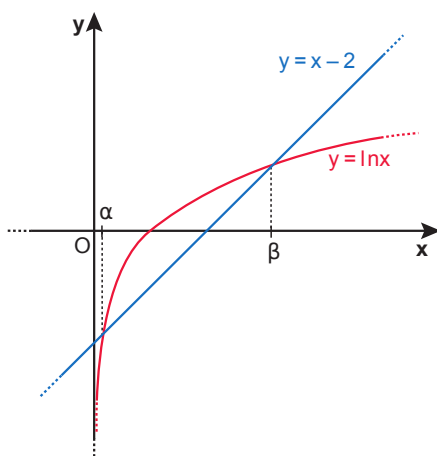
$$h = 2 \quad \text{e} \quad y = \sqrt{2}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO SPERIMENTALE PNI 2014

Osserviamo che f' è definita in $]0; +\infty[$ e in tale dominio è continua. Quindi per determinare i punti di minimo di f studiamo il segno di f' .

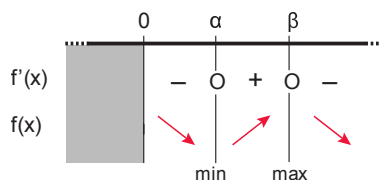
$$f'(x) > 0 \iff \ln x - x + 2 > 0 \iff \ln x > x - 2$$

Risolviamo graficamente l'ultima disequazione, confrontando i grafici della funzione logaritmo $y = \ln x$ e della retta di equazione $y = x - 2$.



Notiamo che le due curve si intersecano in due punti di ascissa α e β con $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 2$ e che f' è positiva per i valori compresi tra α e β .

Questo significa che in tali punti la derivata f' si annulla e quindi che gli unici punti stazionari di f sono α e β . Dallo studio del segno di f' possiamo capire che l'unico punto di minimo relativo è α .



Osservando che l'unico numero tra 0 e 1 proposto tra le opzioni è 0,159, concludiamo che la risposta corretta è la (D).

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

L'insieme degli eventi possibili nel lancio di tre dadi ha cardinalità $6^3 = 216$.

Per calcolare la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 dobbiamo individuare le terne che danno somma 9. Queste sono:

A 1,2,6

B 1,3,5

C 1,4,4

D 2,2,5

E 2,3,4

F 3,3,3

La terna *A* si può ottenere in 6 modi differenti (1, 2, 6; 1, 6, 2; 2, 1, 6; ...), così come le terne *B* ed *E*. Le terne *C* e *D* si possono ottenere in 3 modi diversi ciascuna, mentre la terna *F* in un unico modo.

In totale abbiamo:

$$6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 25 \quad \text{possibili esiti positivi.}$$

La probabilità che la somma sia 9 è quindi pari a:

$$\frac{25}{216}.$$

Per calcolare la probabilità di ottenere in un lancio la somma 10 dobbiamo individuare le terne che danno somma 10. Queste sono:

A 1,3,6

B 1,4,5

C 2,2,6

D 2,3,5

E 2,4,4

F 3,3,4

Le terne A , B e D si possono ottenere in 6 modi differenti ciascuna; C , E e F si possono ottenere in 3 modi diversi ciascuna.

In totale abbiamo $6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$ possibili esiti positivi.

La probabilità che la somma sia 10 è quindi pari a $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

Quindi la probabilità di ottenere la somma 10 è maggiore di quella di ottenere la somma 9.

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2014

Due insiemi hanno la medesima cardinalità, cioè sono equipotenti, quando si può stabilire una corrispondenza biunivoca (uno a uno) tra i loro elementi.

L'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi ha la medesima cardinalità di \mathbb{N} , perché fra di essi si può stabilire la corrispondenza biunivoca che segue:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots \end{array}$$

Anche l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali è numerabile. Lo si può mostrare scrivendo i suoi elementi in tabella, in questo modo:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{0}{0} & \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & \frac{0}{3} & \frac{0}{4} & \dots \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{2}{0} & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \dots \\ \frac{3}{0} & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \dots \\ \frac{4}{0} & \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

e ordinandone gli elementi procedendo lungo diagonal successive, per evidenziare una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \frac{0}{0} & \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{2}{0} & \frac{1}{1} & \frac{0}{2} & \frac{3}{0} & \dots \end{array}$$

L'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, infine, non è numerabile. Lo si può mostrare considerando un suo sottoinsieme, per esempio quello dei reali strettamente compresi tra 0 e 1, e dimostrando che esso non è numerabile.

Assumiamo per assurdo che tale insieme sia numerabile, ed elenchiamone gli elementi, indicando con (a_{ij}) la j -esima cifra decimale del numero reale di posto i :

$$r_1 = 0, (a_{11})(a_{12})(a_{13})$$

$$r_2 = 0, (a_{21})(a_{22})(a_{23})$$

...

A questo punto, possiamo certamente costruire un nuovo numero reale compreso tra 0 e 1 la cui prima cifra sia diversa da a_{11} , la cui seconda cifra sia diversa da a_{22} , e così via. Poichè almeno una cifra di tale numero è diversa da tutti gli elementi enumerati, si conclude che l'insieme scelto non è numerabile. Dunque anche \mathbb{R} , che lo contiene, non è numerabile.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE PNI 2014

Il limite risulta 1 solamente per $a = b = 4$.

Innanzitutto osserviamo che il denominatore tende a 0 per $x \rightarrow 0$, quindi, affinché il limite non risulti infinito, è necessario che anche il numeratore tenda a zero.

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{a + bx} - 2) = \sqrt{a} - 2,$$

e

$$\sqrt{a} - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 4,$$

l'unico valore accettabile per il parametro a è 4.

Sostituendo $a = 4$ al limite considerato otteniamo una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.

Applichiamo il teorema di De L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + bx} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{b}{2\sqrt{4 + bx}} - 0}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{2\sqrt{4 + bx}} = \frac{b}{4}$$

Tale limite deve valere 1, quindi $b = 4$.

Riscriviamo la funzione ottenuta per i valori $a = 4$ e $b = 4$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 + 4x} - 2}{x}$$

Il dominio naturale di f si trova ponendo $4 + 4x \geq 0$ e $x \neq 0$. Dunque il dominio è $[-1; 0[\cup]0; +\infty[$ che in effetti ha 0 come punto di accumulazione. Il limite per $x \rightarrow 0$ ha dunque significato e vale proprio 1.