

aggiornamento
luglio 2014

Problemi, Quesiti e Soluzioni di Esami di Stato di Liceo Scientifico

(2010-2014 ORD)

da Zanichelli-MATUTOR®

www.cm-physmath.net

CM_Portable MATH Notebook Series™





Leonhard Euler (1707-1783)

A. S. 2009-2010

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ODINAMENTO 2010

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario¹.

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP . Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ .

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$, $x \in \mathbb{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0;1)$? E nel punto $S(1;0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S ?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS , ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy , si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0, b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b . Si illustri come varia G_b al variare di b .

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

2. Sia P un punto di G_b . La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e ($e =$ numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y , da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n .
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x; f(x))$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$
7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4. \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

9. Si provi che non esiste un triangolo ABC , con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{ABC} = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y .

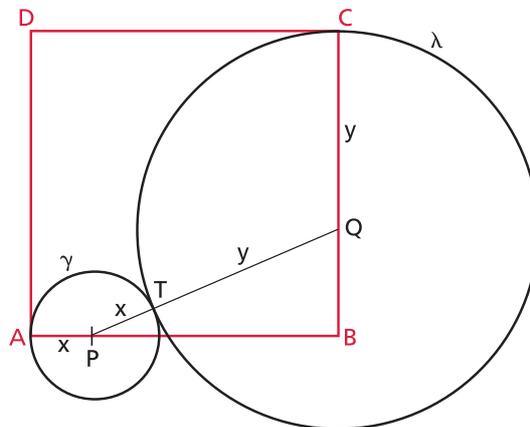
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

1. Definiamo T il punto di tangenza tra le circonferenze γ e λ : perciò

$$\overline{QT} = \overline{AP} = x, \quad \overline{PB} = 1 - x.$$

Indichiamo il raggio della circonferenza λ con y :

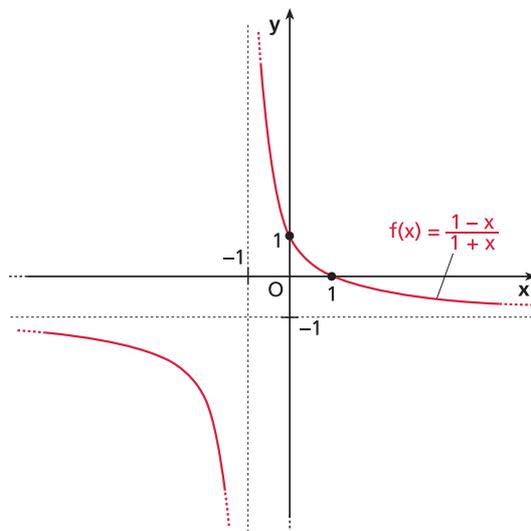
$$\overline{CQ} = \overline{CT} = y, \quad \overline{BQ} = 1 - y.$$



Per ricavare y in funzione di x , osserviamo che il triangolo PBQ è un triangolo rettangolo e quindi verifica il teorema di Pitagora:

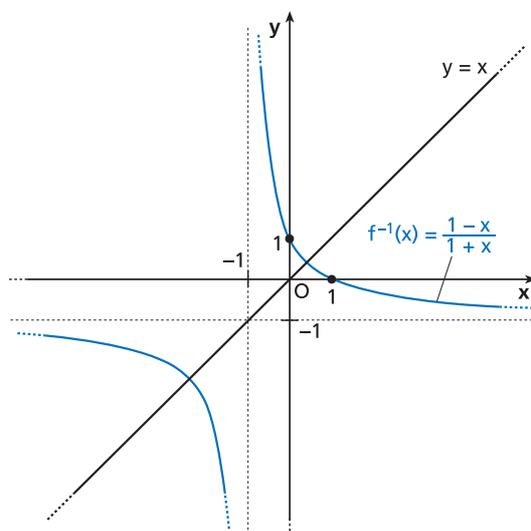
$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 \\ \longrightarrow (x+y)^2 &= (1-x)^2 + (1-y)^2 \longrightarrow \\ \longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \longrightarrow \\ \longrightarrow y(2x+2) &= -2x + 2 \longrightarrow \\ \longrightarrow y &= \frac{1-x}{1+x} \end{aligned}$$

2. La funzione $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ è una funzione omografica definita per $x \neq -1$, di asintoti $x = -1$ e $y = -1$: il suo centro è il punto $(-1; -1)$. Le intersezioni con gli assi sono i punti $(0;1)$ e $(1;0)$.



La funzione $f(x)$ è una funzione invertibile perchè suriettiva, per $y \neq -1$, e iniettiva.

Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ mediante una simmetria assiale rispetto alla retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante.



Il grafico di $f^{-1}(x)$ coincide con quello di $f(x)$: infatti ricavando l'espressione analitica di $f^{-1}(x)$ si ottiene:

$$y = \frac{1-x}{1+x} \longrightarrow (1+x)y = 1-x \longrightarrow x(y+1) = 1-y \longrightarrow x = \frac{1-y}{1+y},$$

cioè $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x} = f(x)$.

3. Poichè $g(x) = |f(x)|$, osservando il grafico di $f(x)$ possiamo scrivere

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{1+x} & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -f(x) = -\frac{1-x}{1+x} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x)$ nel suo punto $R(x_R; y_R)$ ha equazione:

$$y - y_R = g'(x_R)(x - x_R).$$

Quindi è necessario il calcolo della derivata $g'(x)$: poichè $x_R = 0$, allora

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

e

$$g'(x) = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

Valutando in $x_R = 0$, si ottiene $g'(x_R) = -2$ e infine l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ in R è:

$$y - 1 = -2(x - 0) \longrightarrow y = -2x + 1.$$

Nel punto S la funzione $g(x)$ non è derivabile; infatti, calcolando la derivata $g'(x)$ si ottiene:

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{2}{(1+x)^2} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Per $x = 1$ si ha

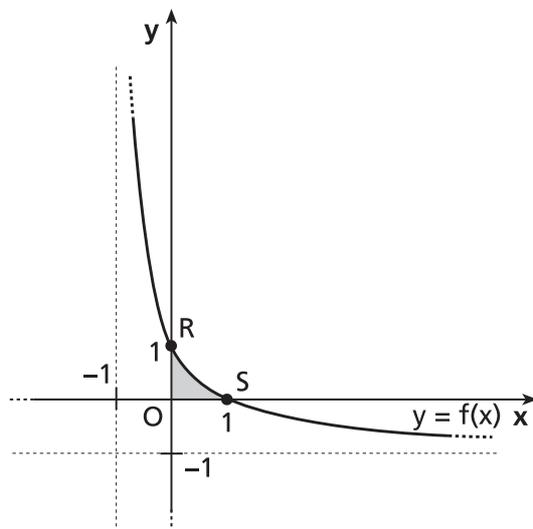
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

I due limiti sono diversi e perciò $g(x)$ non è derivabile in $x = 1$: pertanto non esiste la retta tangente al grafico di $g(x)$ per $x = 1$.

4. L'area del triangolo mistilineo ROS corrisponde a

$$\int_0^1 f(x) dx,$$



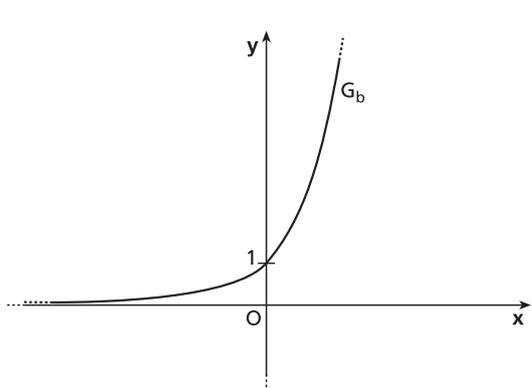
cioè

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{-(1+x) + 2}{1+x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x} \right) dx = \\ &= \int_0^1 -1 dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \\ &= [-x]_0^1 + 2 [\ln |1+x|]_0^1 = \\ &= -1 + 0 + 2(\ln 2 - \ln 1) = -1 + 2 \ln 2 = -1 + \ln 4. \end{aligned}$$

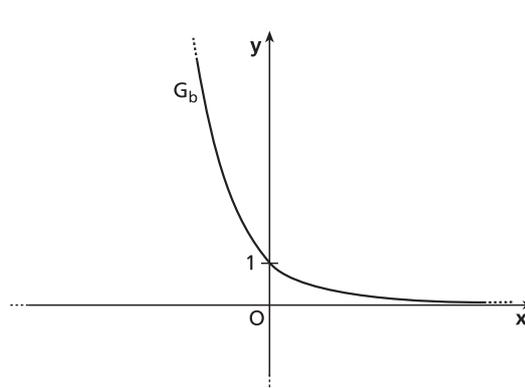
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

1. Distinguiamo due casi:

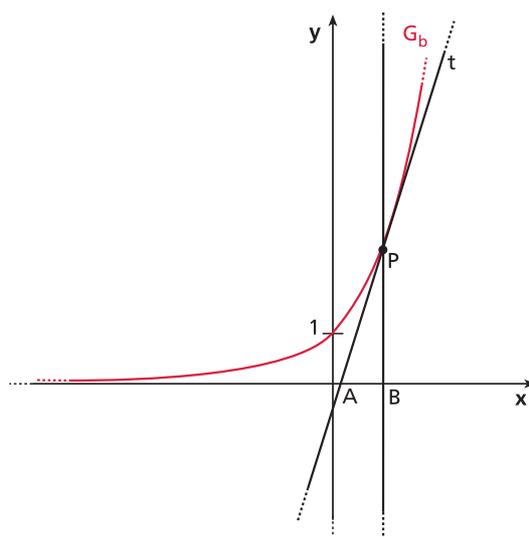
$b > 1$



$0 < b < 1$



2. A titolo di esempio, rappresentiamo il grafico G_b nel caso $b > 1$.



P è un punto generico di G_b di coordinate $P(a; b^a)$. La retta t , tangente in P al grafico G_b , ha equazione

$$t : y - b^a = f'(a)(x - a)$$

ricordando che $f'(x) = \ln b \cdot b^x$, otteniamo:

$$t : y = \ln b \cdot b^a x - \ln b \cdot b^a \cdot a + b^a.$$

Evidentemente, $B(a; 0)$. Per ottenere le coordinate del punto A , risolviamo il sistema

$$A : \begin{cases} y = \ln b \cdot b^a x - \ln b \cdot b^a \cdot a + b^a \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'ascissa di A verifica l'equazione

$$\ln b \cdot b^a x = \ln b \cdot b^a \cdot a - b^a \rightarrow x = a - \frac{1}{\ln b} \rightarrow A \left(a - \frac{1}{\ln b}; 0 \right).$$

La lunghezza del segmento AB è

$$\left| a - \frac{1}{\ln b} - a \right| = \left| \frac{1}{\ln b} \right|$$

che è indipendente dalla scelta di P . La lunghezza del segmento AB è 1 se e solo se $\left| \frac{1}{\ln b} \right| = 1 \Leftrightarrow \ln b = \pm 1 \Leftrightarrow b = e \vee b = \frac{1}{e}$.

3. Poniamo $b = e$. Sia $Q(c; e^c)$ un punto generico di G_e . La retta tangente a G_e in Q ha equazione

$$t_Q : y = e^c x - ce^c + e^c.$$

Se vogliamo che t_Q passi per l'origine dobbiamo imporre che il termine noto $-ce^c + e^c$ si annulli:

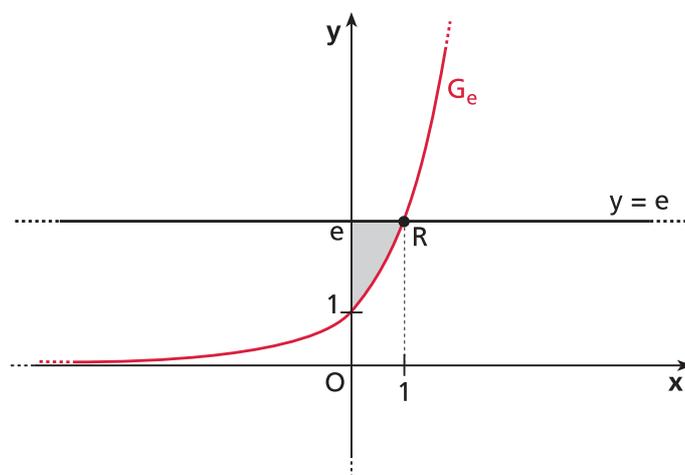
$$0 \in t_Q \rightarrow -ce^c + e^c = 0 \rightarrow c = 1$$

Pertanto, $r = t_1$. il coefficiente angolare di r è dato da $f'(1) = e$. Ciò significa che r forma un angolo di $\arctg(e)$ radianti con il semiasse positivo delle ascisse.

4. Dobbiamo calcolare l'area della regione desiderata (ombreggiata in figura)

Dapprima, calcoliamo l'ascissa del punto R di intersezione tra G_e e la retta di equazione $y = e$

$$R : \begin{cases} y = e \\ y = e^x \end{cases} \rightarrow x = 1 \wedge y = e$$



Pertanto l'area della regione ombreggiata è uguale al risultato dell'integrale

$$\int_0^1 (e - e^x) dx.$$

Per linearità, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e - e^x) dx &= \int_0^1 e dx - \int_0^1 e^x dx \\ &= [ex]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

Data la funzione polinomiale $p(x)$ di grado n :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},$$

si calcoli la sua derivata prima, seconda, terza, ..., n -esima:

$$\begin{aligned} p'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1; \\ p''(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + a_2; \\ p'''(x) &= n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + \cdots + a_3; \\ &\dots \\ p^{(n)}(x) &= [n(n-1)(n-2)\dots \cdot 2 \cdot 1] a_n = n! a_n. \end{aligned}$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 2 CORSO DI ORDINAMENTO 2010</p>
--

Applichiamo il teorema delle tre perpendicolari. Se dal piede B della retta PB perpendicolare al piano ABC si manda la perpendicolare BA alla retta CA del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano di AB e PB , cioè ABP . Se ne deduce che AC è perpendicolare a tutte le rette del piano ABP passanti per A e in particolare è perpendicolare ad AP , quindi il triangolo PCA è rettangolo. Inoltre, poiché per ipotesi PB è perpendicolare al piano ABC , PB è perpendicolare ad AB e a CB , quindi i triangoli PAB e PAC sono rettangoli.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

La funzione $f(x) = e^{3x} + 1$ ha dominio \mathbb{R} ed è derivabile in ogni punto. Ne segue che la pendenza (cioè il coefficiente angolare) della retta tangente nel punto $(x; f(x))$ è uguale alla derivata prima della funzione calcolata in x . La derivata di $f(x) = e^{3x} + 1$ vale:

$$f'(x) = 3e^{3x}.$$

Troviamo, quindi, per quale valore di x tale derivata assume il valore 2.

$$3e^{3x} = 2 \quad \longrightarrow \quad e^{3x} = \frac{2}{3} \quad \longrightarrow \quad 3x = \ln \frac{2}{3} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{3}.$$

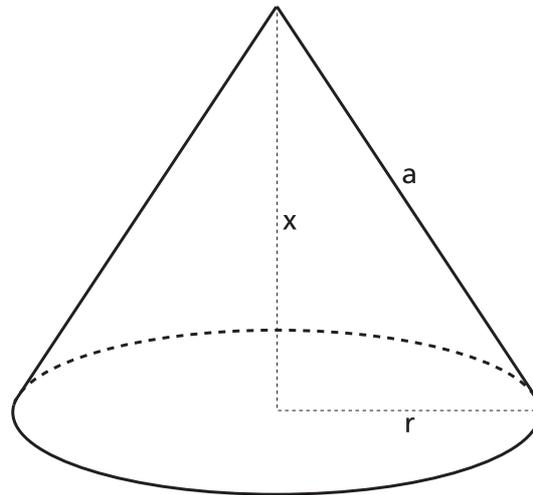
Equivalentemente possiamo scrivere $x = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 3)$ o anche $x = \ln \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 4 CORSO DI ORDINAMENTO 2010</p>
--

Operando il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, allora applicando il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$, si può scrivere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \text{sen } \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{1}{t} \cdot \text{sen } t = 4$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2010



Dato il cono circolare retto in figura, sia x l'altezza, r il raggio del cerchio di base e $a = 80 \text{ cm} = 8 \text{ dm}$ l'apotema. Omettendo l'unità di misura il raggio e il volume del cono risultano rispettivamente:

$$r = \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow r = \sqrt{64 - x^2} \text{ con } 0 < x < 8$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(64 - x^2)x.$$

Consideriamo la funzione

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(64x - x^3) \text{ con } 0 < x < 8 \rightarrow V'(x) = \frac{1}{3}\pi(64 - 3x^2),$$

abbiamo

$$V'(x) = 0 \text{ per } x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x) > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$V'(x) < 0 \text{ per } \frac{8\sqrt{3}}{3} < x < 8.$$

Pertanto il volume del cono è massimo per $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, quindi

$$V\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \left(64 - \frac{64}{3}\right) \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27} \text{ dm}^3.$$

Poichè $1\text{dm}^3 = 1\ell$, il serbatoio ha pertanto volume in litri:

$$V = \frac{1024\sqrt{3}\pi}{27}\text{dm}^3 = \frac{1024\sqrt{3}}{27}\pi\ell \simeq 206,4\ell.$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 6 CORSO DI ORDINAMENTO 2010</p>
--

Il dominio è individuato da $\cos x \geq 0$, cioè

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 7 CORSO DI ORDINAMENTO 2010</p>
--

La funzione $h(x)$ è continua in $x = 4$ se $\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = h(4)$, cioè:

$$h(4) = 3 \cdot 16 - 11 \cdot 4 - 4 = 0 = \lim_{x \rightarrow 4^+} (kx^2 - 2x - 1) = k \cdot 16 - 2 \cdot 4 - 1 = 16k - 9.$$

$$\text{Quindi } 16k - 9 = 0 \longrightarrow k = \frac{9}{16}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

Una successione numerica si dice progressione aritmetica se la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante. Pertanto deve valere:

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-3} - \binom{n}{n-2} \quad \text{con } n > 3 \text{ e naturale;}$$

ovvero:

$$2\binom{n}{n-2} - \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-3} = 0.$$

Applichiamo per ogni coefficiente binomiale la legge delle classi complementari,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}:$$

$$2\binom{n}{2} - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} = 0.$$

Sviluppiamo i coefficienti binomiali e risolviamo l'equazione in n .

$$2\frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} = 0$$

$$n(n-1) - n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} = 0$$

$$n(6n - 12 - n^2 + 3n - 2) = 0$$

$$n(n^2 - 9n + 14) = 0 \rightarrow$$

$$n_1 = 0 \text{ non accettabile}$$

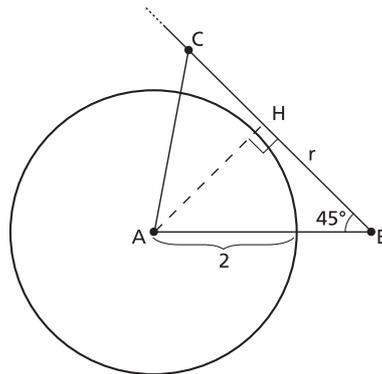
$$n_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow n_2 = 2 \vee n_3 = 7$$

Il valore $n = 2$ non è accettabile poiché $n > 3$.

Pertanto il valore di n per cui i coefficienti dati sono in progressione aritmetica è $n = 7$.

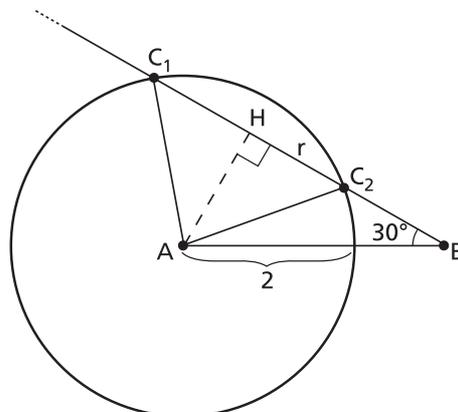
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

Consideriamo un segmento AB e un angolo di ampiezza 45° di vertice B , con un lato AB e il secondo lato la semiretta r . Al variare di C in r otteniamo tutti i possibili triangoli ABC con $\overline{AB} = 3$ e $\widehat{ABC} = 45^\circ$.



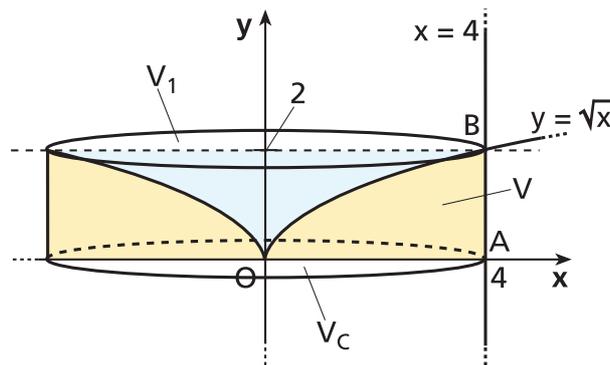
Osserviamo che il segmento AH distanza di A da r ha lunghezza pari a $\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Il lato AC deve essere maggiore di AH e quindi la sua lunghezza non può quindi essere uguale a 2, perché $\frac{3}{2}\sqrt{2} > 2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} > 4$.

Se invece $\widehat{ABr} = 30^\circ$, la distanza \overline{AH} tra A ed r risulta pari a $\frac{3}{2}$, che è minore di 2. Esistono quindi due punti, C_1 e C_2 , simmetrici rispetto ad AH , tali che $\overline{AC_1} = \overline{AC_2} = 2$. Essi si ottengono dall'intersezione di r con la circonferenza di centro A e raggio 2.



SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

In figura è indicato il solido di volume V ottenuto dalla rotazione intorno all'asse y della regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$,



Si osserva che tale volume si ottiene come differenza tra il volume del cilindro V_C , di raggio OA con $A(4;0)$, e altezza AB con $B(4;2)$, e il volume V_1 del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e l'asse y . Risulta:

$$V_C = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi;$$

poiché il volume V_1 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = x^2$, dall'asse x e da $x = 2$, risulta:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Pertanto il volume V vale:

$$V = V_C - V_1 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi.$$

A. S. 2010-2011

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ODINAMENTO 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario¹.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \text{sen } \pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy , si studino f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici G_f e G_g .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R .
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su \mathbb{R} la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy .
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ , dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile la funzione g definita su \mathbb{R}^+ se per ciascun x_i , oggetto dell'osservazione, si ha : $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.

6. Si calcoli

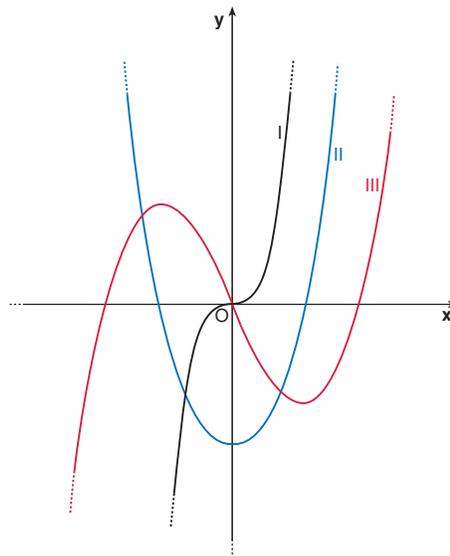
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$$

7. Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .

8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?

9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.



Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' . Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1 CORSO DI ORDINAMENTO 2011

1. Studio di $y = f(x)$:

- $D_f = \mathbb{R}$.

- Ricerca simmetrie: la funzione è dispari, infatti:

$$f(-x) = -f(x).$$

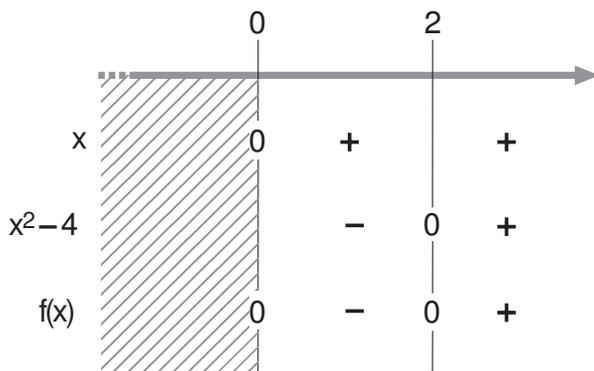
Per questo motivo studiamo la funzione per $x \geq 0$; ricaveremo l'altra metà del grafico per simmetria rispetto all'origine O .

- Punti di intersezione con gli assi coordinati: cominciamo con l'asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm 2 \end{cases}$$

Ci sono tre punti di intersezione con l'asse x : $A_1(-2; 0)$, $A_2(0; 0)$, $A_3(2; 0)$. Di queste, A_2 è intersezione di $y = f(x)$ anche con l'asse y .

• Positività: $x(x^2 - 4) > 0$:



Quindi la funzione $f(x)$ è positiva (in $x \geq 0$) per $x > 2$.

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Inoltre, poiché

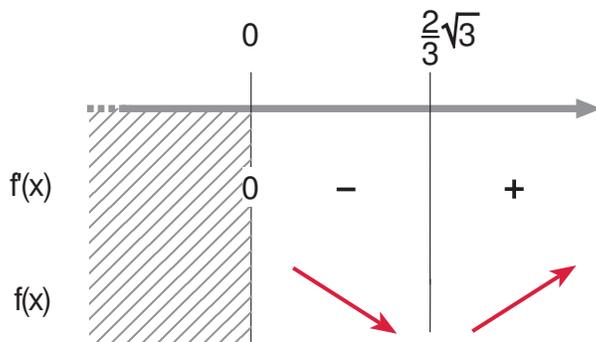
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

- Derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 4.$$

Studio del segno di $f'(x)$:



Nell'intervallo di studio la funzione è crescente per $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tale valore individua un punto di minimo relativo, secondo lo schema del segno di $f'(x)$ sopra riportato; calcoliamo le sue coordinate:

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

Quindi il punto di minimo relativo è

$$M_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$

e per simmetria il punto

$$M_2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$

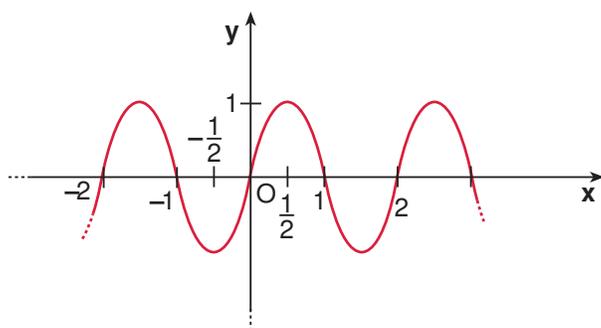
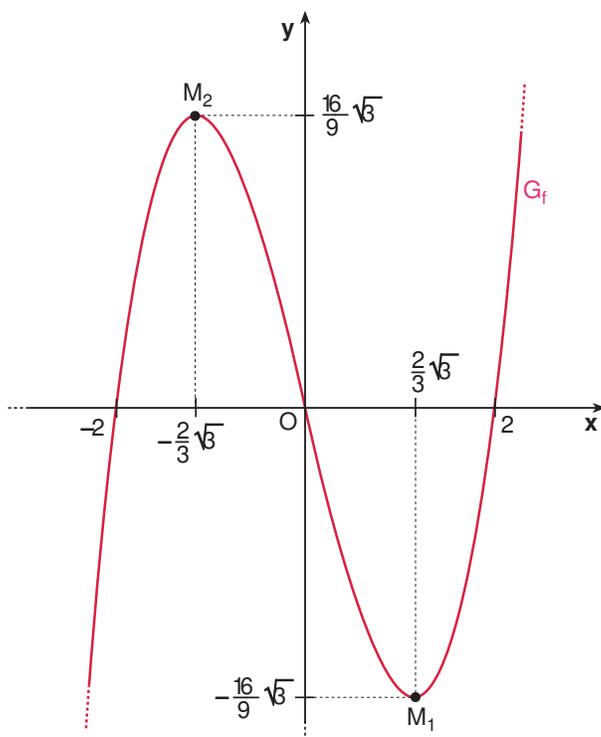
è punto di massimo relativo.

- Derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

Studio del segno di $f''(x)$: nell'intervallo di studio è evidente che $f''(x)$ è sempre non negativa. Pertanto in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre il punto $O(0;0)$ in cui si annulla $f''(x)$ è un punto di flesso.

- Tracciamo il grafico G_f di $y = f(x)$, sfruttando la simmetria rispetto all'origine:



Studio di $g(x)$: tale funzione si ottiene da $y = \sin x$ mediante una contrazione orizzontale che porta il punto $(2\pi; 0)$ in $(2; 0)$.

2. - Calcoliamo l'intersezione G_f e la retta $y = -3$:

$$\begin{cases} y = -3 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x^3 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono le ascisse richieste: $x_1 = 1$ e $x^2 + x - 3 = 0$, cioè

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \text{ e } x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

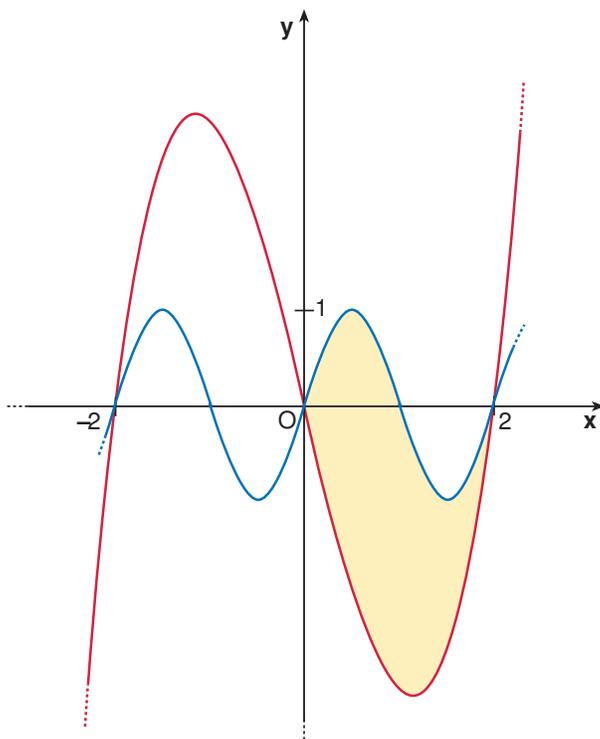
- I punti a tangente orizzontale del grafico di $y = \sin x$ nell'intervallo $[-6\pi; 6\pi]$ hanno coordinate

$$\left(\frac{2k+1}{2}\pi; (-1)^k\right) \quad \text{per } -6 \leq k \leq 5, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza i punti a tangente orizzontale di G_g compresi nell'intervallo $[-6; 6]$ sono:

$$\left(\frac{2k+1}{2}; (-1)^k\right) \quad \text{per } -6 \leq k \leq 5, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Individuiamo graficamente la regione R : L'area di R è il risultato dell'integrale



$$\int_0^2 [g(x) - f(x)] dx$$

cioè

$$\begin{aligned} \int_0^2 [\sin \pi x - x^3 + 4x] dx &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x - \frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos 2\pi - 4 + 8 + \frac{1}{\pi} \cos 0 = 4. \end{aligned}$$

4. Il volume della vasca può essere calcolato nel modo seguente: sezioniamo il solido in esame con piani del tipo $x = x_0$ perpendicolari alla superficie della vasca e paralleli all'asse y . Otteniamo dei rettangoli di area

$$S(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)] \cdot h(x_0).$$

Quindi il volume della vasca espresso in m^3 è equivalente al valore dell'integrale definito:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 [\text{sen } \pi x - x^3 + 4x] \cdot (3 - x) dx = \\ &= 3 \int_0^2 \text{sen } \pi x dx - \int_0^2 x \text{sen } \pi x dx + \int_0^2 (-3x^3 + x^4 + 12x - 4x^2) dx = \\ &= \left[\frac{3}{\pi} \cos \pi x - \frac{3}{4} x^4 + \frac{x^5}{5} + 6x^2 - \frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 - \int_0^2 x \text{sen } \pi x dx. \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^2 x \text{sen } \pi x dx$ può essere risolto per parti secondo la formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e ponendo

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \text{sen } \pi x.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \text{sen } \pi x dx &= \left[-\frac{x}{\pi} \cos \pi x \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{\pi} \cos \pi x dx \\ &= -\frac{2}{\pi} + \left[\frac{1}{\pi^2} \text{sen } \pi x \right]_0^2 = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'espressione del volume V si ottiene:

$$V = \left(\frac{116}{15} + \frac{2}{\pi} \right) m^3 = \frac{116\pi + 30}{15\pi} m^3$$

e perciò la capacità della vasca è di circa

$$8369,95l.$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2 CORSO DI ORDINAMENTO 2011

1. Sostituiamo il valore $x = 0$ nell'espressione di $f(x)$, che sarà, quindi:

$$be^0 + 3 = 2 \Rightarrow b = -1.$$

Quindi

$$f(x) = (ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

Imponiamo che la funzione ammetta un massimo nel punto di ascissa 4:

$$\begin{cases} f'(x) = \left(-\frac{a}{3}x + \frac{1}{3} + a\right) e^{-\frac{x}{3}} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + a\right) e^{-\frac{4}{3}} = 0$$

cioè $a = 1$.

Pertanto

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}(4 - x)e^{-\frac{x}{3}}$$

da cui deduciamo il seguente quadro relativo al segno di $f'(x)$:

		+4	
	----->		
$4-x$	+	0	-
$e^{-\frac{x}{3}}$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

Il valore $x = 4$ è effettivamente quello in corrispondenza del massimo relativo richiesto.

In definitiva, la funzione f è pari a

$$f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

2. Studio della funzione $f(x)$.

- Il dominio è \mathbb{R} .
- Non esistono simmetria del grafico Γ di $y = f(x)$.
- Dato che non si possono determinare per via analitica le eventuali intersezioni con l'asse x , dedurremo la loro posizione e il loro valore dallo studio dei limiti e delle derivate della funzione.

Ricordiamo solo l'intersezione con l'asse y già nota: $(0; 2)$.

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Cerchiamo gli asintoti orizzontali e obliqui. Osserviamo subito che il primo termine del limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3]$$

si presenta come una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$, che si può risolvere utilizzando il teorema di de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3] = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{\frac{x}{3}}} = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}} = 3$$

Quindi $y = 3$ è asintoto orizzontale destro.

Ora, poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{3}} = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3] = -\infty$$

e

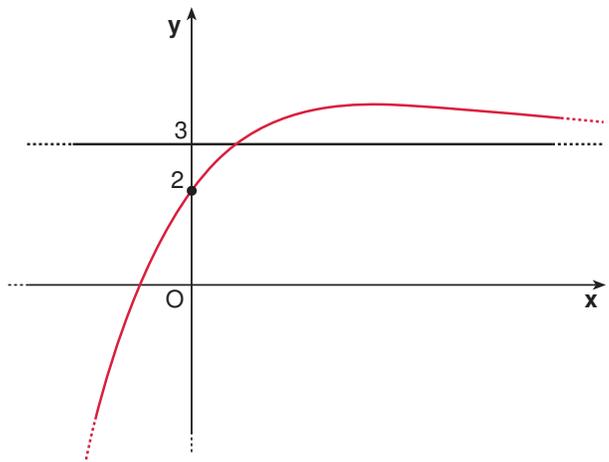
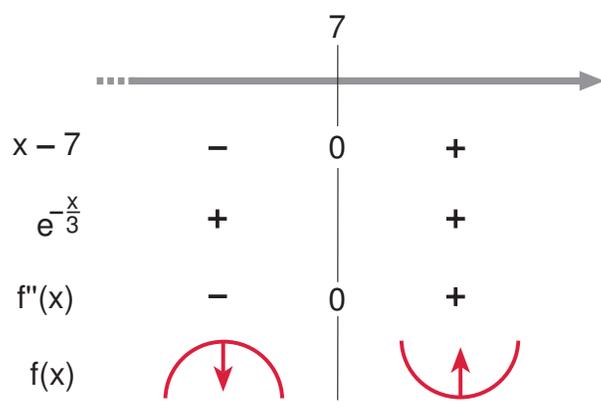
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}}}{x} + \frac{3}{x} \right] = +\infty.$$

Quindi non esistono né asintoto orizzontale né asintoto obliquo sinistro.

- Studio della derivata prima. Essa è stata già studiata nel punto 1: la funzione è crescente nell'intervallo $] -\infty; -4[$ e presenta un massimo assoluto nel punto di ascissa $x = -4$ di coordinate $(-4; 3e^{-\frac{4}{3}+3})$.
- Studio della derivata seconda:

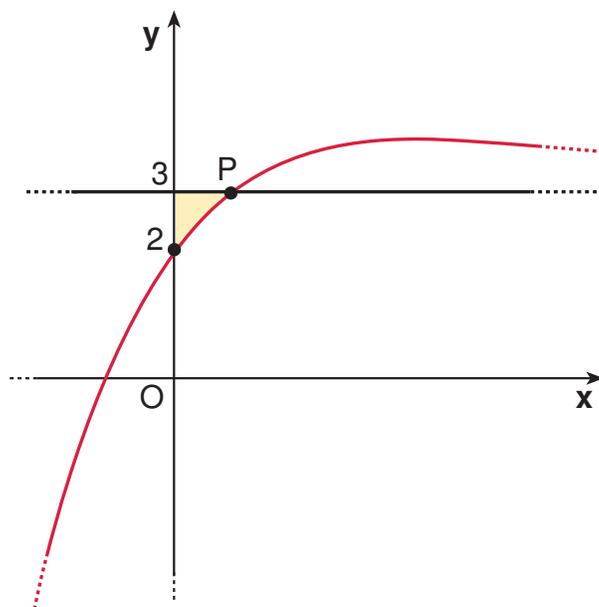
$$f''(x) = \frac{1}{9}(x-7)e^{-\frac{x}{3}}.$$

Studiamo il suo segno. Perciò la funzione volge la concavità verso l'alto per $x > 7$ e presenta un flesso nel punto di coordinate $(7; 6e^{-\frac{7}{3}+3})$.



- Grafico Γ di $y = f(x)$: Osserviamo che dal grafico si può dedurre l'esistenza di un'unica intersezione tra il grafico e l'asse x , di scissa compresa tra i valori $x = -2$ e $x = -1$.

3. Individuiamo la regione di piano indicata.



Cerchiamo il punto P , intersezione tra la funzione $y = f(x)$ e la retta $y = 3$.

$$\begin{cases} y = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Il punto P ha coordinate $(1; 3)$.

L'area della regione assegnata vale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [3 - f(x)] dx &= \int_0^1 [3 - (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} - 3] dx = \\ &= - \int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}} dx + \int_0^1 e^{-\frac{x}{3}} dx = \\ &= - \int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}} dx + [-3e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 = \\ &= - \int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}} dx - 3e^{-\frac{1}{3}} + 3. \end{aligned}$$

Il primo integrale si calcola per parti, ricordando la formula

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

e assumendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^{-\frac{x}{3}}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-\frac{x}{3}} dx &= [-3x e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 + 3 \int_0^1 e^{-\frac{x}{3}} dx = \\ &= -3e^{-\frac{1}{3}} - 9 [e^{-\frac{x}{3}}]_0^1 = \\ &= 9 - 12e^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Quindi l'area cercata vale:

$$-9 + 12e^{-\frac{1}{3}} - 3e^{-\frac{1}{3}} + 3 = 9e^{-\frac{1}{3}} - 6.$$

4. Riportiamo la tabella fornita completandola con il calcolo dei valori di $f(x_i)$ e $|f(x_i) - y_i|$ (questi ultimi arrotondati alla terza cifra decimale):

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	$e^{-\frac{2}{3}} + 3$	$2e^{-1} + 3$	$3e^{-\frac{4}{3}} + 3$	$4e^{-\frac{5}{3}} + 3$	$5e^{-2} + 3$
$ f(x_i) - y_i $	0,030	0,020	$\simeq 0,023$	$\simeq 0,026$	$\simeq 0,009$	$\simeq 0,004$	$\simeq 0,027$

La funzione f è accettabile relativamente ai dati forniti. Tuttavia, nonostante f assuma valori maggiori di 3 per $x \geq 2$, non possiamo affermare che l'evoluzione del fenomeno porterà a profitti non inferiori a 3 milioni di euro. Infatti se consideriamo, per esempio, $x = 20$ (cioè i dati relativi all'anno 2024),

$$f(20) = 19e^{-\frac{20}{3}}$$

e ricordiamo che $|f(20) - y_{20}| \leq 10^{-1}$, allora

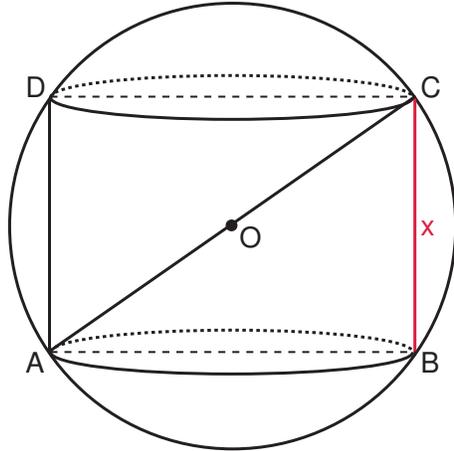
$$f(20) - 10^{-1} \leq y_{20} \leq f(20) + 10^{-1}$$

che arrotondato alla terza cifra decimale, risulta

$$2,924 \leq y_{20} \leq 3,124.$$

Non abbiamo nessuna garanzia che y_{20} sia non inferiore a 3 milioni di euro.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2011



E' dato un cilindro inscritto in una sfera di raggio $AO = 60$ cm. Indichiamo con x l'altezza BC (omettiamo per comodità l'unità di misura): $\overline{BC} = x$, $0 < x < 120$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}^2 = 120^2 - x^2.$$

Determiniamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V = \pi \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4} \cdot \overline{CB} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \pi \cdot \frac{14400 - x^2}{4} \cdot x$$

$$V(x) = \frac{\pi}{4}(14400x - x^3), \quad 0 < x < 120.$$

Ricaviamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno:

$$V'(x) = \frac{\pi}{4}(14400 - 3x^2) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{3}{4}\pi(4800 - x^2),$$

$$V'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 40\sqrt{3},$$

$$V'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 40\sqrt{3} < x < 120,$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 40\sqrt{3}.$$

Pertanto la funzione $V(x)$ ammette massimo per $x = 40\sqrt{3}$.

In $x = 40\sqrt{3}$, si ricava:

$$V_{\max} = V(40\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}(14400 \cdot 40\sqrt{3} - 64000 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \cdot 384000 = 96000\pi\sqrt{3}.$$

Introduciamo ora l'unità di misura. Si ha:

$$V_{\max} = 96000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Poiché $1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ l}$, la capacità in litri del serbatoio risulta:

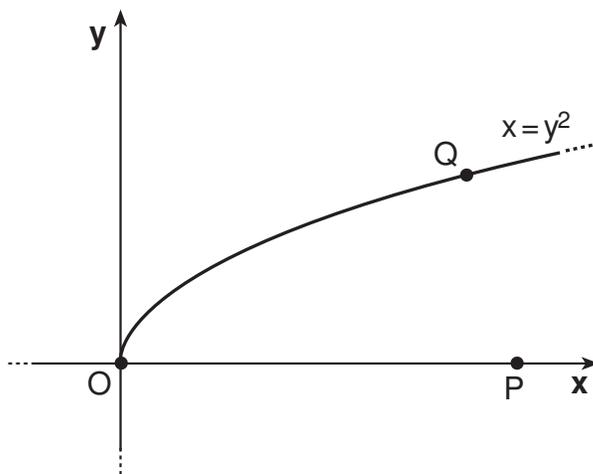
$$V_{\max} = 96\pi\sqrt{3} \text{ l} \simeq 522,371.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

La curva di equazione $y = \sqrt{x}$ è un ramo di parabola, infatti tale equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Il punto di P di coordinate $(4; 0)$ non è un punto di tale curva.



Un generico punto Q della curva ha coordinate $Q(t^2; t)$ con $t \geq 0$. Calcoliamo la distanza di Q da P in funzione del parametro t :

$$\overline{QP}^2 = (t^2 - 4)^2 + t^2 = t^4 - 8t^2 + 16 + t^2 = t^4 - 7t^2 + 16.$$

I valori di t che rendono minimo \overline{QP} sono tutti e soli quelli che rendono minimo \overline{QP}^2 . Per semplicità, consideriamo allora

$$f(t) = t^4 - 7t^2 + 16, \text{ per } t \geq 0.$$

Per trovare il minimo di questa funzione, studiamo il segno della sua derivata:

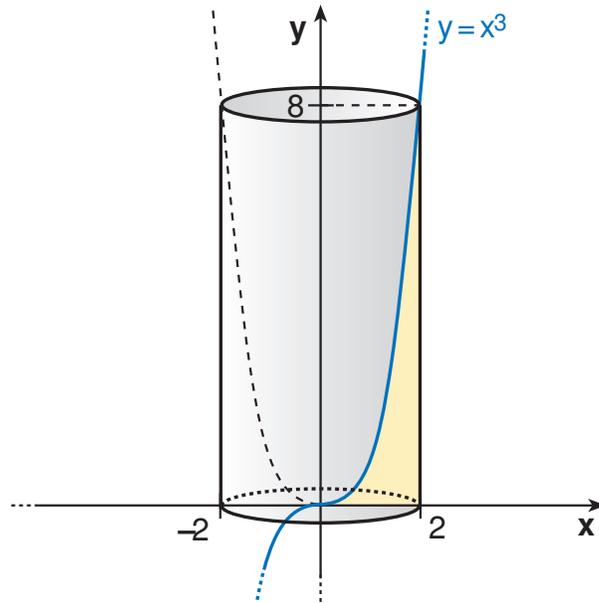
$$f'(t) = 4t^3 - 14t = 2t(2t^2 - 7).$$

Ricordando che t assume valori non negativi, la derivata è positiva per $t > \sqrt{\frac{7}{2}}$ e negativa per $0 < t < \sqrt{\frac{7}{2}}$. Ne segue che la funzione assume il valore minimo per $t = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Il corrispondente punto Q sulla curva è, in conclusione, $Q\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Rappresentiamo il solido di cui si chiede il volume:



Il solido W si ottiene dalla differenza tra il cilindro di altezza di misura 8 e raggio di base di misura 2, con il solido ottenuto dalla rotazione del ramo di curva $x = \sqrt[3]{y}$ attorno all'asse y . Calcoliamo i volumi di questi due solidi:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 8 = 32\pi$$

$$V_2 = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3} \right]_0^8 = \frac{3}{5} \pi \cdot 8^{5/3} = \frac{96}{5} \pi$$

In conclusione

$$V_W = 32\pi - \frac{96}{5}\pi = \frac{64}{5}\pi.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Risolviamo l'equazione:

$$C_{n,4} = C_{n,3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n \geq 4.$$

Utilizziamo la formula

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \quad \text{con } n \geq k :$$

$$C_{n,4} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!},$$

$$C_{n,3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}.$$

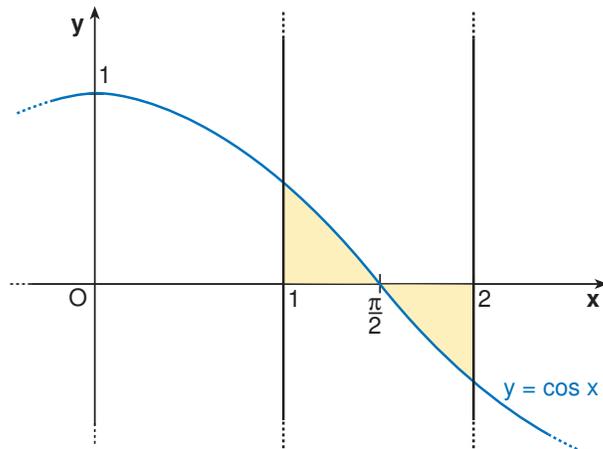
Uguagliamo:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2} \\ \Rightarrow \frac{n-3}{4} &= 1 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $n = 7$ come soluzione accettabile.

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Rappresentiamo la regione considerata:



L'area richiesta è la somma delle due aree seguenti:

$$A_1 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\text{sen } x]_1^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \text{sen } 1,$$

$$A_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^2 \cos x dx = - [\text{sen } x]_{\frac{\pi}{2}}^2 = -\text{sen } 2 + 1.$$

In conclusione:

$$A = A_1 + A_2 = 1 - \text{sen } 1 - \text{sen } 2 + 1 = 2 - \text{sen } 1 - \text{sen } 2.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \frac{0}{0} \quad (\text{forma indeterminata}).$$

Applichiamo la regola di De L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

Osservazione: Facendo un cambiamento di variabile $h = x - a$, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a + h) - \operatorname{tg} a}{h}.$$

Si tratta del limite del rapporto incrementale della funzione tangente in $x = a$, cioè della derivata prima della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ in $x = a$: $f'(a) = \frac{1}{\cos^2 a}$.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 7 CORSO DI ORDINAMENTO 2011</p>
--

La funzione $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$ è continua in $[-1; 0]$ e derivabile in $] - 1; 0[$.

Calcoliamo i suoi valori agli estremi:

$$f(-1) = -1 - 2011 + 12 = -2000 < 0;$$

$$f(0) = 12 > 0.$$

Quindi $f(x)$ si annulla in almeno un punto compreso fra -1 e 0.

Calcoliamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011 > 0$$

per ogni $x \in] - 1; 0[$.

Quindi $f(x)$ è una funzione monotona strettamente crescente e si annulla in uno e un solo punto compreso fra -1 e 0.

Consideriamo l'equazione associata:

$$x^{2011} + 2011x + 12 = 0;$$

per le proprietà della funzione associata sopra citate, l'equazione ammette una e una sola radice compresa fra -1 e 0.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 8 CORSO DI ORDINAMENTO 2011</p>
--

Il problema della quadratura del cerchio fa parte della celebre famiglia di problemi classici che non possono essere risolti utilizzando soltanto riga (senza tacche) e compasso. Dato un cerchio, di centro e raggio noti, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi \cdot r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 fu dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. L'impossibilità di tale costruzione deriva dal fatto che π è un numero trascendente.

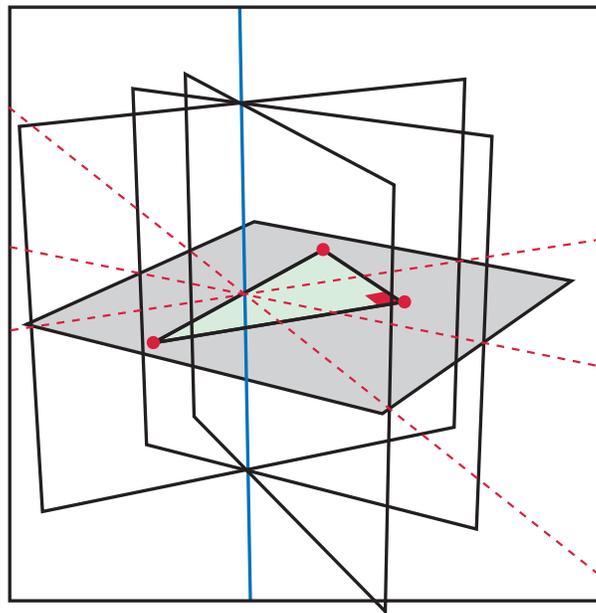
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

Proponiamo due metodi, il primo di geometria euclidea (sintetica) e il secondo di geometria analitica.

Metodo sintetico.

Ricordiamo che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati A e B è il *piano assiale* del segmento AB , ovvero il piano perpendicolare ad AB passante per il punto medio di AB .

Da ciò segue che il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo. Tali piani si intersecano in effetti in una retta perpendicolare al piano π contenente il triangolo.



Prendiamo infatti due qualunque di tali piani assiali, diciamo α piano assiale del lato a e β piano assiale del lato b , allora α e β sono perpendicolari a π , e le loro intersezioni con π sono gli assi di a e b . L'intersezione di α e β è dunque una retta perpendicolare a π , passante per il circocentro del triangolo.

Ricordiamo infine che il circocentro di un triangolo rettangolo è il punto medio dell'ipotenusa.

Metodo analitico

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano i punti $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$. Sia $P(x; y; z)$ un generico punto dello spazio. La condizione $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$ equivale alle equazioni:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + (y - b)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Semplificando, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

che sono quelle della retta perpendicolare al piano del triangolo, $z = 0$, e passante per il punto $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$, che è il punto medio di AB .

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

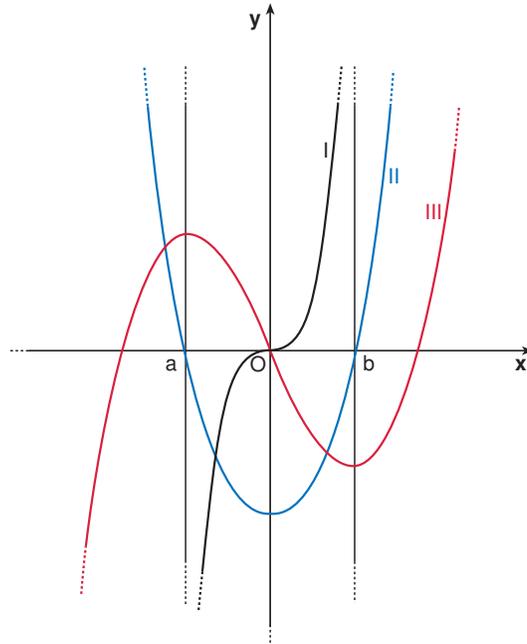
Possiamo subito escludere le alternative A) e B). Infatti, se il grafico di f fosse I, ne seguirebbe che, per $x > 0$, sia il grafico di f' sia quello di f'' dovrebbero trovarsi nel primo quadrante poiché f è, per ogni $x > 0$, strettamente crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

Anche l'alternativa C) non può essere corretta, poiché, per $x > 0$, la funzione II è crescente, mentre la funzione III assume tutti i valori negativi in corrispondenza di alcune ascisse positive.

Analogamente, escludiamo anche l'alternativa E), poiché vi è un intervallo in cui la funzione III decresce mentre il grafico I si mantiene nel semipiano delle ordinate positive.

L'unica alternativa plausibile è la D). Analizziamola in dettaglio.

Osserviamo innanzitutto che gli zeri del grafico II corrispondono ai punti di massimo e minimo locali di III. Indichiamoli con a e b .



Per $x < a$ e per $x > b$, la funzione III è crescente e quella II è positiva. Mentre, per $a < x < b$, la funzione III è decrescente e, coerentemente, la funzione II assume valori negativi. Ne segue che il grafico II è compatibile con quello della derivata prima della funzione III. Per quanto riguarda la derivata seconda, osserviamo che la funzione I è

positiva proprio per $x > 0$, cioè in corrispondenza dell'intervallo in cui il grafico III ha la concavità verso l'alto. Quest'ultima inoltre ha la concavità rivolta verso il basso proprio in corrispondenza delle ascisse per le quali la funzione I risulta negativa.

La risposta corretta è, in conclusione, la *D*).

A. S. 2011-2012

<p style="text-align: center;">ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO 2012</p>
--

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = |27x^3| \text{ e } g(x) = \text{sen} \left(\frac{3}{2}\pi x \right).$$

1. Qual è il periodo della funzione g ? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy .
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s ?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g . Si calcoli l'area di R .
4. La regione R , ruotando intorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi $A(3, 0)$ e $B(0, 3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0, 3/2)$.

1. Sia r la retta tangente in A a L . Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB .

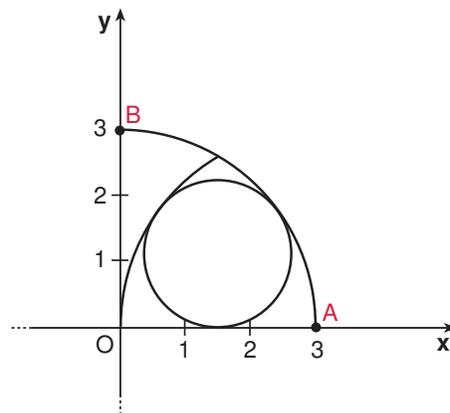
¹Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

- La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W .
- Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x .

- Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x . Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



QUESTIONARIO

- Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \left(\frac{1}{2} + h \right)^4 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^4}{h}$$

- Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
- La posizione di una particella è data da $s(t) = 20 \left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2 \right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?
- Qual è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?
- Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?
- Sia $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .
8. Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?
9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B , situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.
10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?
- A) $\cos(\sin(x^2 + 1))$ B) $\sin(\cos(x^2 + 1))$ C) $\sin(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$.

Si giustifichi la risposta.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

1. Il periodo T della funzione g è ottenuto uguagliando l'argomento di g a 2π , poiché 2π è il periodo della funzione $y = \sin x$. Pertanto il periodo di T vale:

$$\frac{3}{2}\pi T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{4}{3}.$$

Studiamo la funzione

$$f(x) = |27x^3| = \begin{cases} 27x^3, & \text{se } x \geq 0 \\ -27x^3, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

- Dominio: \mathbb{R} .
- Simmetrie: $f(-x) = f(x)$, ossia la funzione è pari e il grafico è simmetrico rispetto all'asse y .
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = |27x^3| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

- Segno della funzione:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |27x^3| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

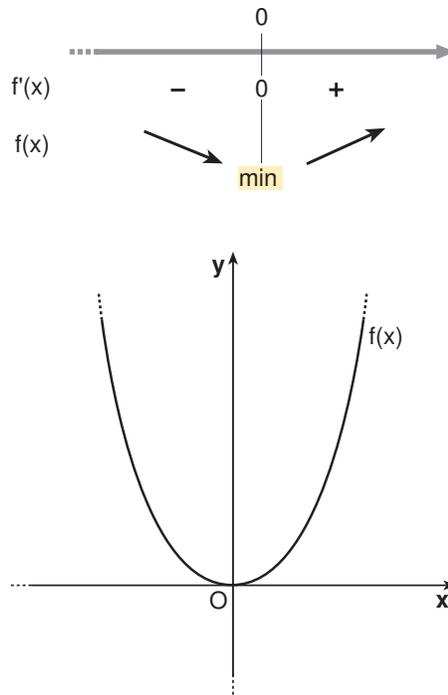
- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -81x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$$f''(x) = \begin{cases} 162x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -162x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, quindi $(0; 0)$ è un punto di minimo per $f(x)$ e la funzione è crescente in $[0; +\infty[$ e decrescente in $] - \infty; 0]$.

Osserviamo che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione è convessa.



Studiamo la funzione $g(x) = \text{sen} \left(\frac{3}{2}\pi x \right)$.

- Dominio: \mathbb{R} .
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \text{sen} \left(\frac{3}{2}\pi x \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}k \\ y = 0 \end{cases}, \text{ per ogni } k \text{ intero.}$$

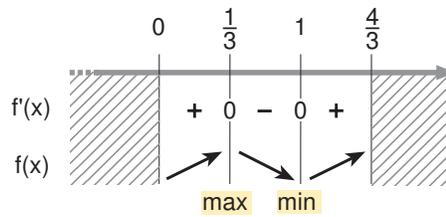
- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{2}\pi \cos \left(\frac{3}{2}\pi x \right); \\ g''(x) &= - \left(\frac{3}{2}\pi \right)^2 \text{sen} \left(\frac{3}{2}\pi x \right). \end{aligned}$$

Per $x \in \left[0; \frac{4}{3} \right]$ vale:

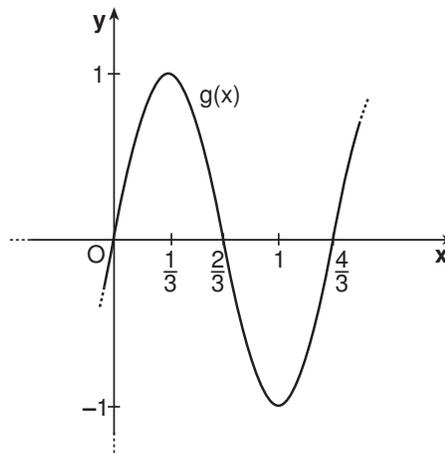
$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{3}{2}\pi x \right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{3}{2}\pi x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi \leq \frac{3}{2}\pi x \leq 2\pi \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \vee 1 \leq x \leq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Pertanto la funzione ha massimi in $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k; 1\right)$ per ogni intero k e minimi in $\left(1 + \frac{4}{3}k; -1\right)$ per ogni intero k . Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}k, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto la funzione ha flessi in $\left(\frac{2}{3}k; 0\right)$ per ogni intero k .



2. In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un generico punto $(x_0; y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y , ha equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

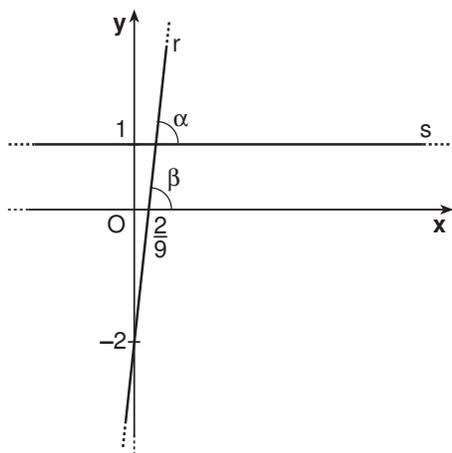
Nel punto $x_0 = \frac{1}{3}$, risulta $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 9$ e la retta r tangente a G_f nel punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ha equazione:

$$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = 9x - 2.$$

Nel punto $x_0 = \frac{1}{3}$, risulta $g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ e la retta s tangente a G_g nel punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ha equazione:

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1.$$

Per determinare l'ampiezza dell'angolo acuto α formato da r e da s osserviamo che α è congruente all'angolo β formato dalla retta r e dall'asse delle x e quindi $\text{tg}(\beta)$ corrisponde al coefficiente angolare della retta r . Pertanto l'angolo α vale:



$$\alpha = \beta = \text{arctg}(9) = 1,46 \text{ rad} = 83^\circ 40'.$$

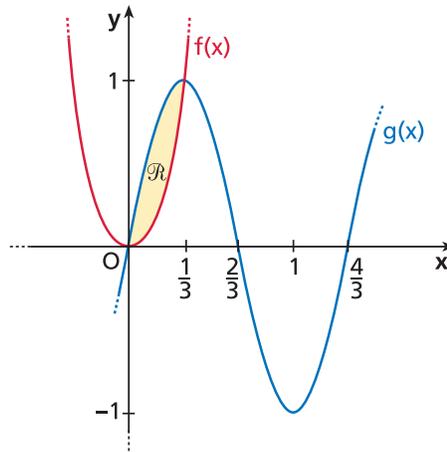
3. L'intersezione dei grafici G_f e G_g è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}.$$

Osserviamo inoltre che vale la disuguaglianza $27x^3 < \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ per $x \in \left]0; \frac{1}{3}\right[$.

L'area della regione R è data da:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3 \right) dx = \\ &= \left[-\frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27\frac{x^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \\ &= \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

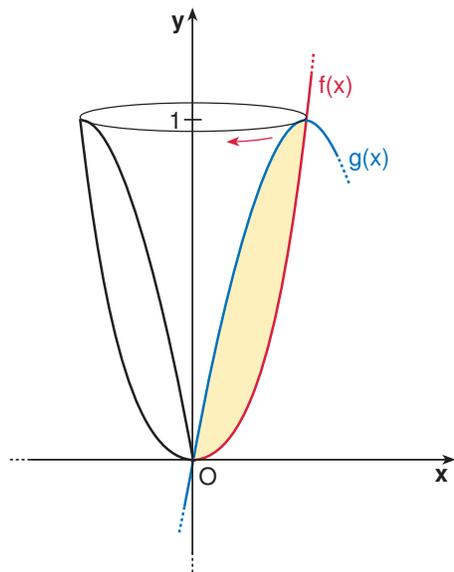
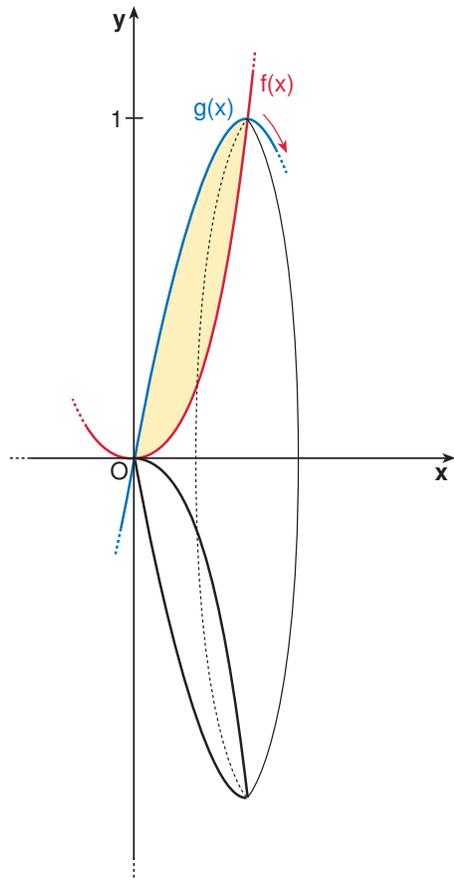


4. Il volume S del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle x può essere ottenuto come differenza tra il volume V_1 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse x attorno all'asse x , e il volume V_2 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = 27x^3$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse x attorno all'asse x . Pertanto il volume S vale:

$$\begin{aligned} S = V_1 - V_2 &= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \right)^2 - (27x^3)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Il volume T del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle y può essere ottenuto come differenza tra il volume V_3 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = 27x^3$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse y attorno all'asse y , e il volume V_4 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse y attorno all'asse y . Poiché il volume V_3 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$, si trova:

$$V_3 = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} \right)^2 dx.$$



Poiché il volume V_4 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{2}{3\pi} \arcsen x$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$, si trova:

$$V_4 = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi} \arcsen x \right)^2 dx.$$

Osservando che $\frac{2}{3} \arcsen(x) < \frac{1}{3} \sqrt[3]{x}$, abbiamo

$$\begin{aligned} T = V_3 - V_4 &= \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{x} \right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi} \arcsen x \right)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{x} \right)^2 - \left(\frac{2}{3\pi} \arcsen x \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

1. Chiamiamo C il punto $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Per facilitare lo studio dell'arco di parabola AC e della retta tangente in A , scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$x^2 = 9 - 6y \Rightarrow 6y = 9 - x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}.$$

L'arco L è dunque il tratto di grafico della funzione $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, compreso tra $x = 0$ e $x = 3$.

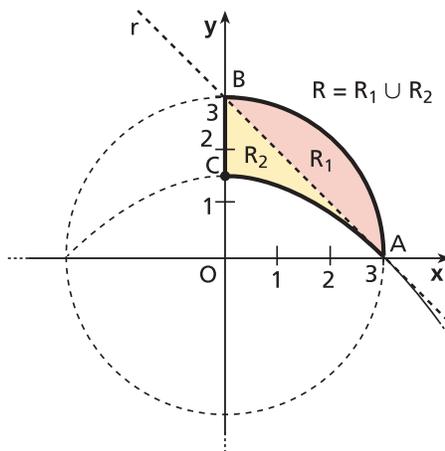
La retta tangente in A ha equazione $y = m(x - x_A) + y_A$, dove $x_A = 3$ e $y_A = 0$ sono le coordinate di A , e $m = p'(3)$ è la derivata di $p(x)$ calcolata in $x = 3$.

Calcoliamo la derivata della funzione $p(x)$:

$$p'(x) = -\frac{1}{6} \cdot 2x + 0 = -\frac{1}{3}x.$$

Poiché $p'(3) = -1$, la retta r ha equazione:

$$r : y = -1(x - 3) + 0 \quad \rightarrow \quad r : y = 3 - x.$$



Osserviamo che r passa anche per il punto B , quindi le due regioni in cui viene diviso R sono:

- il segmento circolare di estremi A e B del cerchio di centro O e raggio 3. Esso si può considerare come la differenza del settore circolare e del triangolo di estremi OAB . Il suo volume è allora:

$$A_{R_1} = A_{sett} - A_{triang} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{2}3^2 = \frac{9\pi - 18}{4};$$

- il triangolo curvilineo ABC , dato dalla differenza del triangolo OAB e la regione OAC compresa tra L e l'asse x (è la metà di un segmento parabolico). L'area di OAC è l'integrale definito di $p(x)$ di estremi 0 e 3:

$$A_{OAC} = \int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{18} + \frac{3}{2}x\right]_0^3 = -\frac{27}{18} + \frac{9}{2} = 3.$$

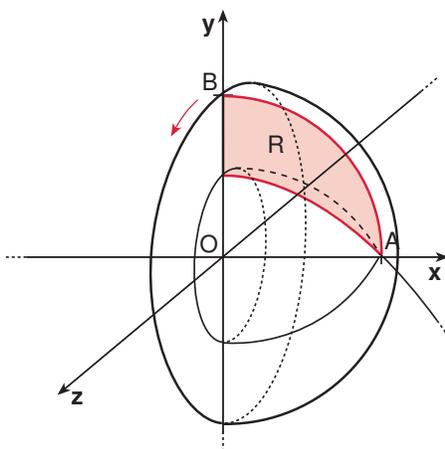
Risulta dunque

$$A_{R_2} = A_{triang} - A_{OAC} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

2. Osserviamo che il volume di W non dipende in nessun modo dalla forma della regione R , ma solamente dalla funzione $S(x)$. Esso è dato dall'integrale definito di $S(x)$ di estremi 0 e 3:

$$V_W = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x} = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}e^{5-9} + \frac{1}{3}e^5 = \frac{e^5 - e^{-4}}{3}.$$

3. Il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse x è la differenza tra una semisfera di centro O e raggio 3 e il solido \mathcal{P} ottenuto dalla rotazione (sempre attorno all'asse x) della regione compresa tra L e l'asse x . Il volume della semisfera



è metà di quello della sfera:

$$V_{semisf} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi.$$

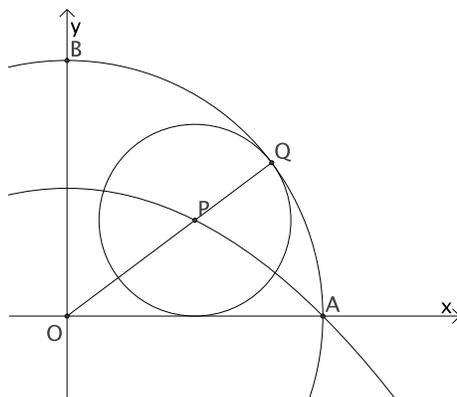
Il volume del solido \mathcal{P} è dato dall'integrale:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}} &= \pi \int_0^3 p(x)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{36} \int_0^3 (x^2 - 9)^2 dx = \\ &= \frac{\pi}{36} \int_0^3 (x^4 - 18x^2 + 81) dx = \frac{\pi}{36} \left[\frac{x^5}{5} - 18 \cdot \frac{x^3}{3} + 81x \right]_0^3 = \\ &= \frac{\pi}{36} \left(\frac{3^5}{5} - \frac{18 \cdot 3^3}{3} + 81 \cdot 3 \right) = \frac{\pi}{36} \cdot 3^4 \left(\frac{3}{5} - 2 + 3 \right) = \frac{9}{4} \pi \cdot \frac{8}{5} = \frac{18}{5} \pi. \end{aligned}$$

Per ottenere il solido ottenuto dalla rotazione di R facciamo la sottrazione:

$$V = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{4}{5} \cdot 18\pi = \frac{72}{5}\pi.$$

4. Ricordiamo che affinché una circonferenza sia tangente internamente a un arco di circonferenza AB di centro O il suo centro deve appartenere al settore circolare OAB . Nel nostro caso, quindi, limitiamo lo studio al settore circolare AOB . Sia



$P(x; y)$ il generico punto del luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x . Una circonferenza di centro P è tangente all'arco AB se la somma della distanza di P dall'origine e del raggio PQ è uguale al raggio OQ . Quindi, dato che la circonferenza ha raggio y , otteniamo:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y = 3 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - y.$$

Possiamo elevare entrambi i membri al quadrato poiché $3 - y$ è non negativo e si ottiene

$$x^2 = 9 - 6y,$$

che è proprio l'equazione che descrive il luogo L .

La circonferenza tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3 ha un asse di simmetria dato dalla retta $s : x = \frac{3}{2}$. Infatti la simmetria assiale di asse s porta la circonferenza di centro A in quella di centro O , e lascia invariato l'asse x . Il centro della circonferenza cercata appartiene alla retta s : è dunque il punto di coordinate $\left(\frac{3}{2}; p\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$. Il raggio è uguale a $\frac{9}{8}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Consideriamo il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}.$$

Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ della funzione $f(x) = 5x^4$ calcolato nel punto $x = \frac{1}{2}$. Si tratta allora della derivata della funzione f calcolata nel punto $x = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 \left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{h} = f' \left(\frac{1}{2}\right).$$

Determiniamo il valore del secondo membro tramite le regole di derivazione:

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3.$$

Pertanto il limite di partenza vale:

$$f' \left(\frac{1}{2}\right) = 20 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{8} = \left(\frac{5}{2}\right).$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Una retta r è asintoto per la funzione $y = f(x)$ se la distanza da r di un generico punto P appartenente al grafico della funzione tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata di P , o entrambe, tendono all'infinito. In particolare:

- r è asintoto orizzontale e ha equazione $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$;
- r è asintoto verticale e ha equazione $x = b$, $b \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$;

r è asintoto obliquo e ha equazione $y = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$.

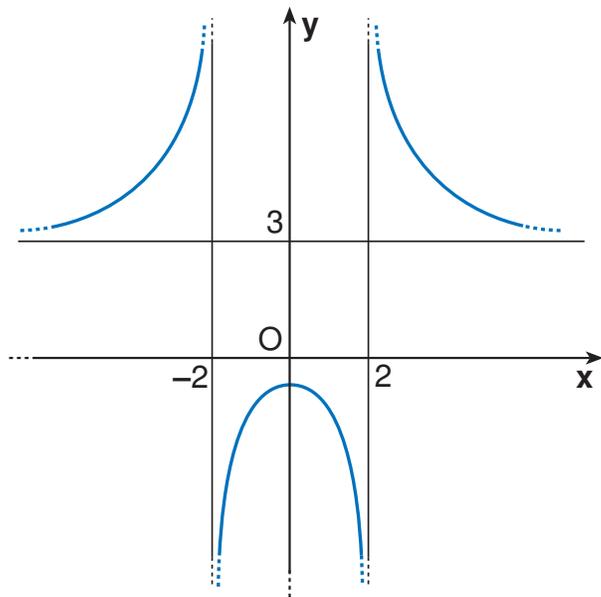
Consideriamo, ad esempio, la funzione $y = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

Il dominio è $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 3; \\ \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{3x^2 + 1}{(x - 2)(x + 2)} = \mp\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{3x^2 + 1}{(x - 2)(x + 2)} = \pm\infty.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$ e due asintoti verticali di equazioni $x = -2$ e $x = 2$, come richiesto dal testo.

Riportiamo in figura il grafico della funzione studiata.



<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 3 CORSO DI ORDINAMENTO 2012</p>
--

Data la posizione di una particella di equazione $s(t) = 20 \left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2 \right)$, determiniamo la velocità $v(t)$ calcolando la derivata prima della funzione $s(t)$ e poi l'accelerazione $a(t)$ calcolando la derivata seconda di $s(t)$.

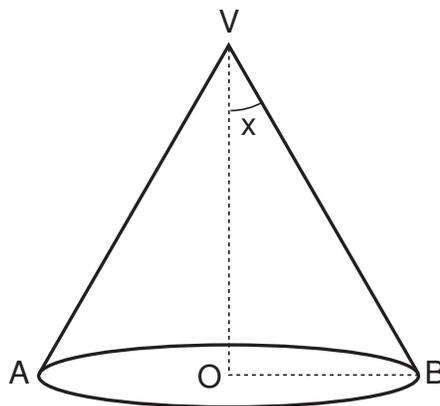
Quindi:

$$v(t) = s'(t) = 20 \left(-e^{-\frac{t}{2}} + 1 \right),$$
$$a(t) = s''(t) = 10e^{-\frac{t}{2}}.$$

L'accelerazione a all'istante $t = 4$ vale:

$$a(4) = 10e^{-\frac{4}{2}} = 10e^{-2} = \frac{10}{e^2}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2012



È dato il cono di vertice V , altezza OV e apotema $BV = 1$ m.
Omettiamo inizialmente per comodità l'unità di misura.
Indichiamo con x l'angolo \widehat{OVB} , con $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per i teoremi dei triangoli rettangoli, risulta:

$$OV = BV \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$

$$OB = BV \cdot \sin x = 1 \cdot \sin x = \sin x.$$

Calcoliamo il volume Vol del cono:

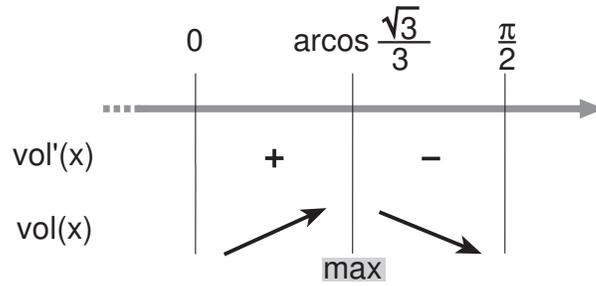
$$\text{Vol}(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OV = \frac{\pi}{3} \sin^2 x \cos x = \frac{\pi}{3} (1 - \cos^2 x) \cos x = \frac{\pi}{3} (\cos x - \cos^3 x).$$

Calcoliamo la derivata prima $\text{Vol}'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\text{Vol}'(x) = \frac{\pi}{3} (-\sin x + 3 \cos^2 x \sin x) = \frac{\pi}{3} \sin x (-1 + 3 \cos^2 x).$$

Visto che per ogni $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin x > 0$, allora $\text{Vol}'(x) > 0$ se e solo se $-1 + 3 \cos^2 x > 0$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$



da cui $0 < x < \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il volume $\text{Vol}(x)$ è massimo per $x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$, e quindi:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\max} &= \text{Vol} \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \left(\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \cos^3 \left(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{2 \cdot \pi}{27} \sqrt{3} \simeq 0,403 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Valutiamo la capacità in litri tenuto conto che $1 \text{ m}^3 = 1000 \ell$:

$$\text{Vol}_{\max} \simeq 0,403 \text{ m}^3 = 403 \ell.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Ricordiamo che:

- un segmento è univocamente determinato dai suoi estremi;
- un triangolo è univocamente determinato dai suoi vertici;
- un tetraedro è univocamente determinato dai suoi vertici.

Pertanto il numero di segmenti che si possono costruire dati n punti corrisponde al numero di coppie di punti che si possono scegliere dagli n dati, ovvero

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analogamente, il numero di triangoli corrisponde al numero di triplette di punti che si possono formare dagli n dati, ovvero

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Allo stesso modo si ottiene che il numero di tetraedri, corrispondente al numero di quaterne di punti che si possono scegliere dagli n dati, è

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

La derivata della funzione

$$f(x) = 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17$$

è pari a

$$f'(x) = 5 \cos^2 x - 5 \operatorname{sen}^2 x - 2 \cos x \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x - 5 \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 2 \operatorname{sen} 2x - 5 \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x = \\ &= 5 \cos 2x - 5 \cos 2x = 0. \end{aligned}$$

Un altro modo per ottenere il valore della derivata prima di f è il seguente.

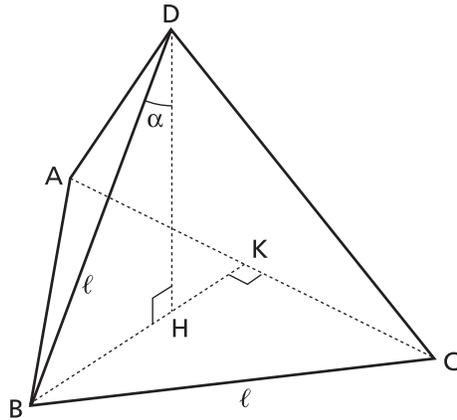
Si noti che

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17 = \\ &= \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17 = \\ &= \cos 2x - \cos 2x - 17 = -17, \end{aligned}$$

allora $f'(x) = 0$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

È dato il tetraedro regolare di vertici $ABCD$, altezza $DH = h$ e spigolo ℓ . Sia α l'angolo



\widehat{BDH} , formato dallo spigolo BD e dall'altezza DH . Poiché il tetraedro regolare è una piramide retta, il piede H dell'altezza coincide con l'incentro del triangolo equilatero ABC , che è anche baricentro e ortocentro, e divide l'altezza BK del triangolo in due parti, una doppia dell'altra. Dalla geometria del triangolo equilatero risulta:

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \Rightarrow BH = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell.$$

Applichiamo il teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria al triangolo BHD per determinare l'ampiezza dell'angolo α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{BH}{BD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\ell}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 35,26^\circ.$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 8 CORSO DI ORDINAMENTO 2012</p>
--

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, continua nell'intervallo $[1; e]$, esiste almeno un punto $z \in [1; e]$ tale che

$$f(z) = \frac{\int_1^e \frac{1}{x} dx}{e - 1},$$

con $f(z)$ valore medio della funzione nell'intervallo. Pertanto vale:

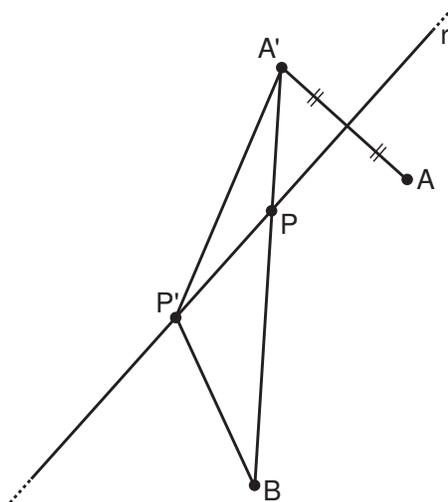
$$f(z) = \frac{\int_1^e \frac{1}{x} dx}{e - 1} = \frac{[\ln |x|]_1^e}{e - 1} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Prima di tutto osserviamo che il cammino minimo che congiunge A e B è una spezzata composta da due segmenti. Questo perchè

1. i cammini che minimizzano le distanze sono segmenti;
2. qualunque cammino che congiunga A e B toccando r si può scrivere come l'unione di due cammini, il primo congiungente A ed r , il secondo congiungente r e B ;
3. ognuno dei due cammini appena introdotti è minimo se e solo se è un segmento.

I Metodo: Sia A' il punto simmetrico di A rispetto alla retta r . Consideriamo il segmento $A'B$. Tale segmento interseca la retta r in un punto P poiché A' e B appartengono a semipiani diversi rispetto ad r . Dimostriamo che P è il punto che realizza il cammino che cerchiamo. Se con P' denotiamo un arbitrario punto della retta (dove $P' \neq P$), considerando il triangolo non degenere $A'P'B$, vale che $A'P' + BP' > A'B$.

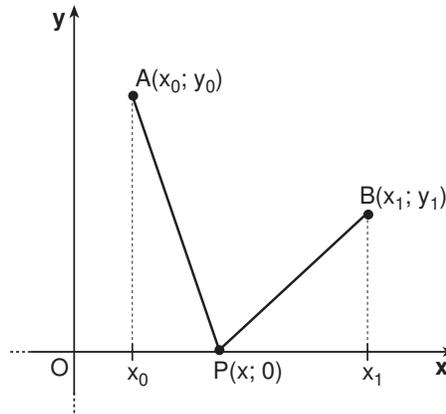


[Clicca qui per guardare l'animazione su MATUTOR!](#)

II Metodo: Per semplicità nei calcoli, possiamo considerare come retta l'asse delle x di equazione $y = 0$. Un generico punto P su tale retta avrà dunque coordinate $P(x; 0)$. Possiamo limitarci a considerare i punti $A(x_0; y_0)$ e $B(x_1; y_1)$ con $y_0 > 0$, $y_1 > 0$ (si potrebbe ragionare analogamente se fosse $y_0 < 0$ e $y_1 < 0$). Possiamo anche ipotizzare che $x_0 < x < x_1$.

$$\text{Sia } f(x) = d(A, P) + d(B, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}.$$

Cerchiamo un punto P di coordinate $P(x; 0)$ per cui $f(x)$ assuma valore minimo. Studiamo dunque la derivata prima di $f(x)$.



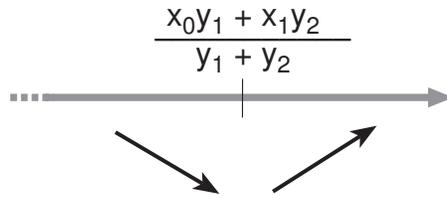
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}} + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} \geq -(x - x_1)\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

Poiché abbiamo assunto $x_0 < x < x_1$, ne consegue che entrambi i membri dell'ultima disequazione sono positivi. Elevandoli al quadrato si ottiene

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 [(x - x_1)^2 + y_1^2] &\geq (x_1 - x)^2 [(x - x_0)^2 + y_0^2] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 + (x - x_0)^2 y_1^2 &\geq (x_1 - x)^2 (x - x_0)^2 + (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - x_0)^2 y_1^2 &\geq (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 &\geq \left(\frac{x_1 - x}{x - x_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Poiché $y_0, y_1 > 0$ e $x_0 < x < x_1$ vale che $\frac{y_1}{y_0} > 0$ e $\frac{x_1 - x}{x - x_0} > 0$, e dunque si ha che

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_0} &\geq \frac{x_1 - x}{x - x_0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_1 x - x_0 y_1 &\geq x_1 y_0 - x y_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}. \end{aligned}$$



Il cammino cercato è quindi dato dall'unione dei segmenti AP e PB , dove P ha coordinate $P\left(\frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}; 0\right)$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Distinguiamo i singoli casi.

A) $f(x) = \cos(\sin(x^2 + 1))$

La funzione coseno è una funzione pari ed è positiva per valori dell'argomento compresi nell'intervallo $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Poiché, per ogni x reale, la funzione $\sin(x^2 + 1)$ assume valori compresi nell'intervallo $] -1, 1[$, e dato che $] -1, 1[\subseteq \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, segue che per ogni x reale la funzione $f(x)$ è positiva.

B) $f(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$

Per ogni x reale, la funzione $\cos(x^2 + 1)$ assume valori compresi nell'intervallo $[-1; 1]$. In questo intervallo la funzione seno assume valori prima negativi, poi positivi.

C) $f(x) = \sin(\ln(x^2 + 1))$

Per $x = 0$ la funzione si annulla infatti $f(0) = \sin(\ln(0 + 1)) = \sin(0) = 0$. Pertanto la funzione non è sempre positiva.

D) $f(x) = \cos(\ln(x^2 + 1))$

Per ogni x reale, la funzione $\ln(x^2 + 1)$ assume valori compresi nell'intervallo $[0, +\infty[$. In questo intervallo la funzione coseno assume valori sia positivi sia negativi.

Quindi, la risposta corretta è la **A**).

A. S. 2012-2013

<p style="text-align: center;">ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO 2013</p>
--

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$$

per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0, 9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f .
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x , $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x , area $A(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W .

¹Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$.

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy . Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ . Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0; 1)$. Una retta t , per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B . Si provi che, qualunque sia t , l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x; y)$ di un punto di Φ .
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0, 2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R , ruotando attorno all'asse y , genera il solido W . Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W .

QUESTIONARIO

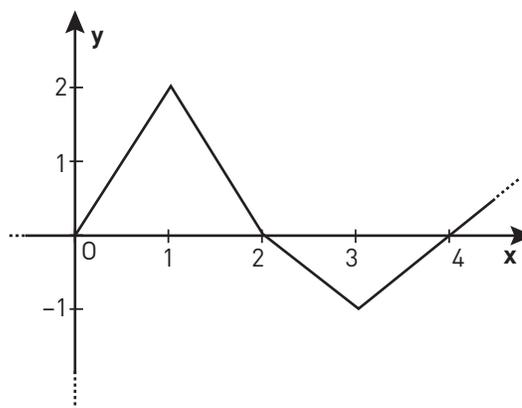
1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.
2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A .

4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a , b e h , illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge “*Due valigie della stessa forma sembrano quasi uguali, quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondano aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio)*”. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?
7. Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b , ha area 1 m^2 e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b ?

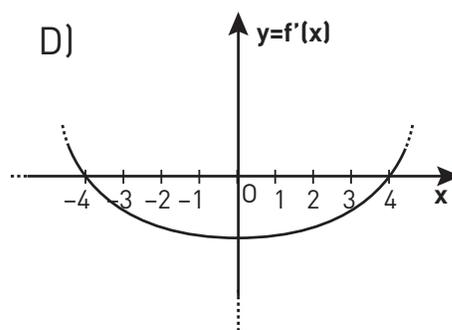
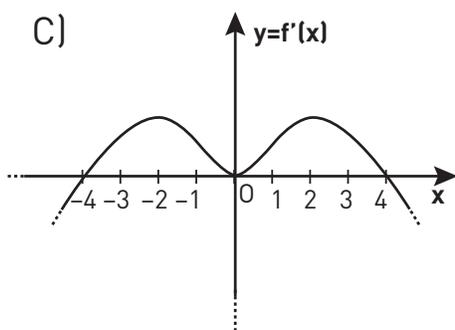
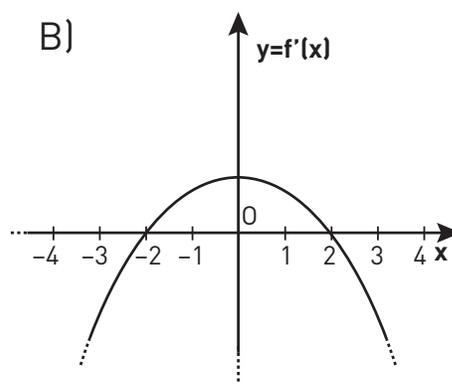
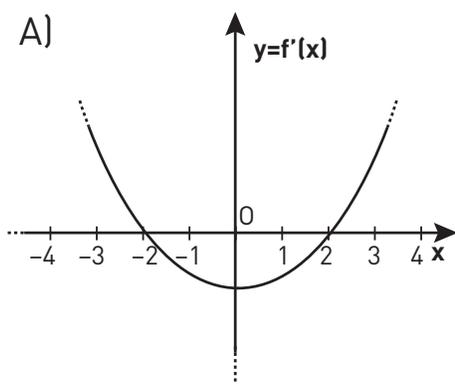
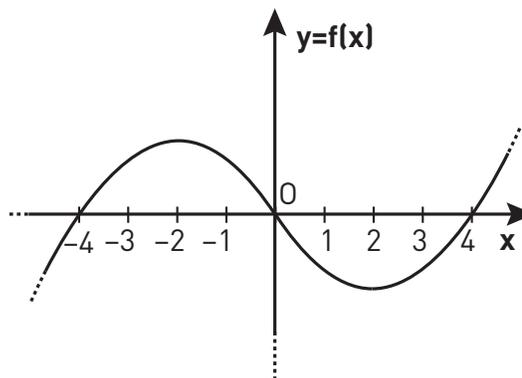
8. La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, per quale valore positivo di x , g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



9. Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

10. Se la figura a lato rappresenta il grafico di $f(x)$, quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si giustifichi la risposta.



SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

1. Data la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right] dt,$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la sua derivata coincide con la funzione integranda:

$$f'(x) = \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Possiamo calcolare i valori richiesti:

$$f'(\pi) = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$f'(2\pi) = \cos \frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Per disegnare il grafico Σ di $f'(x)$, calcoliamo le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani.

Asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos \frac{0}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(0; \frac{3}{2} \right).$$

Asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

nell'intervallo $[0, 9]$.

Si ottiene

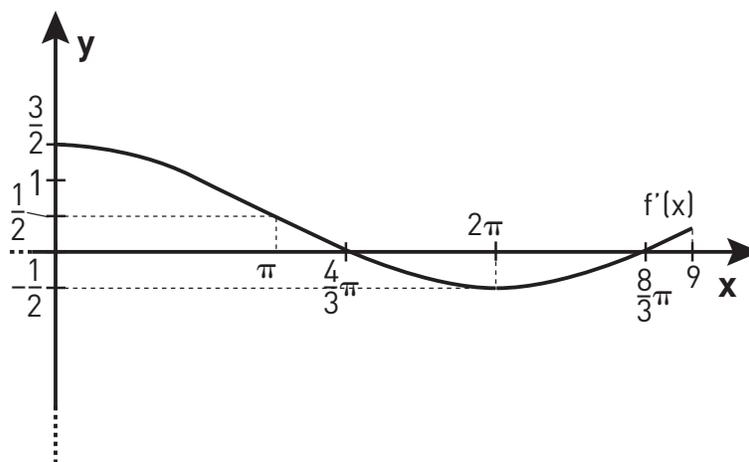
$$\frac{x}{2} = -\frac{2}{3}\pi + 2h\pi, \text{ con } h \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi + 4h\pi.$$

oppure

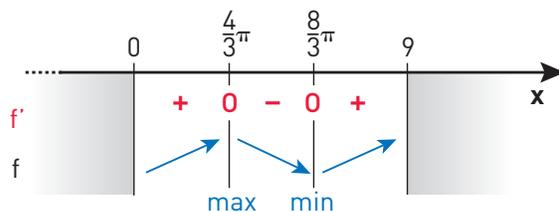
$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi.$$

Nell'intervallo $[0, 9]$ le soluzioni da considerare sono $x = \frac{8}{3}\pi$ che si ottiene per $h = 1$ e $x = \frac{4}{3}\pi$ che si ottiene $k = 0$.

La funzione $f'(x)$ si ottiene mediante una dilatazione della funzione coseno rispetto all'asse x e una sua traslazione rispetto all'asse y . Disegniamo il grafico Σ di $f'(x)$.



Dal grafico dei segni di $f'(x)$ determiniamo gli intervalli di crescita e decrescenza di $f(x)$.



La funzione $f(x)$ ha un massimo per $x = \frac{4}{3}\pi$ e un minimo per $x = \frac{8}{3}\pi$.

Per $x = 0$ è:

$$f(0) = \int_0^0 \left[\cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \right] dt = 0.$$

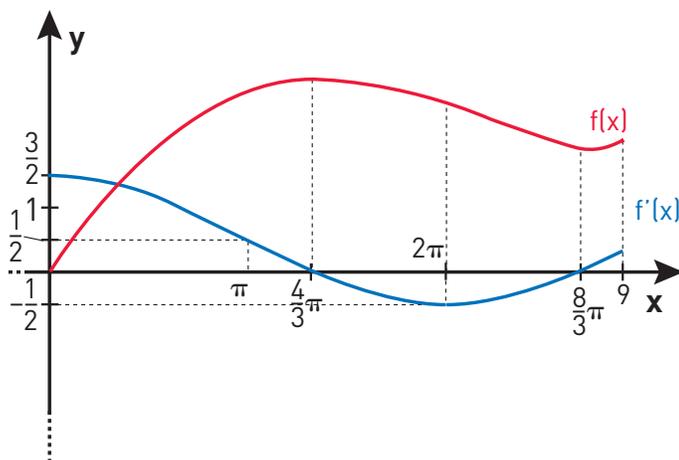
La retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x = 0$ ha coefficiente angolare pari a

$$f'(0) = \frac{3}{2} = 1,5;$$

tale retta passa per l'origine e ha equazione $y = \frac{3}{2}x$. Poiché $f'(x)$ ha un punto di minimo per $x = 2\pi$ (è decrescente in un intorno sinistro, crescente in un intorno destro), risulta che $f''(x)$ si annulla in $x = 2\pi$ (è negativa in un intorno sinistro, positiva in un intorno destro).

Quindi $x = 2\pi$ è un punto di flesso per $f(x)$, con concavità verso il basso in un intorno sinistro e verso l'alto in un intorno destro.

Con le informazioni ottenute possiamo disegnare un possibile grafico di $f(x)$.



3. Il valor medio di $f'(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è dato da:

$$m = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx.$$

Calcoliamo l'integrale con il metodo di sostituzione. Poniamo

$$\frac{x}{2} = t,$$

dunque $x = 2t$ e $dx = 2dt$. Se $x = 0$, si ha $t = 0$; se $x = 2\pi$, allora $t = \pi$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{2} \right) 2dt = 2 \left[\sin t + \frac{1}{2}t \right]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Il valor medio è quindi uguale a

$$m = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}.$$

4. Il volume V del solido W è dato dall'integrale esteso all'intervallo $[0; 4]$ della funzione $A(x)$ che esprime l'area di ciascuna sezione.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(x) \, dx = \int_0^4 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} x \, dx = \left[3 \left(-\cos \frac{\pi}{4} x \right) \cdot \frac{4}{\pi} \right]_0^4 = \\ &= 3(-\cos \pi) \cdot \frac{4}{\pi} - 3(-\cos 0) \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{12}{\pi} + \frac{12}{\pi} = \frac{24}{\pi}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

1. Studiamo la funzione $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$, con dominio \mathbb{R} (infatti $x^2 + 4 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

Notiamo che

$$f(-x) = \frac{8}{4+(-x)^2} = \frac{8}{4+x^2} = f(x),$$

cioè la funzione è pari e il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y .

Cerchiamo ora le intersezioni di f con gli assi cartesiani.

Asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{8}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{8}{4+x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \nexists x \end{cases}$$

Asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{8}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

La funzione interseca dunque l'asse y nel punto $M(0; 2)$.

Passiamo allo studio del segno della funzione f :

$$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{8}{4+x^2} > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$

dunque f è positiva (strettamente).

Calcoliamo i limiti della funzione e ricerchiamone gli eventuali asintoti. Notiamo innanzitutto che, poiché f è definita su tutto \mathbb{R} , la funzione non presenta nessun asintoto verticale. Possiamo però calcolare i limiti per x che tende all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0.$$

Esiste quindi un asintoto orizzontale ed è $y = 0$. Non serve ricercare eventuali asintoti obliqui.

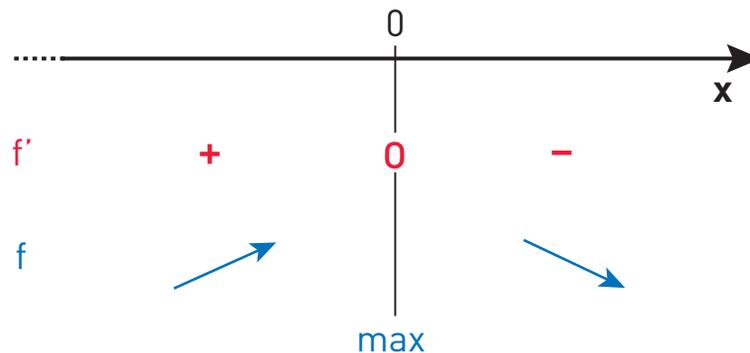
Procediamo calcolando la derivata prima di f :

$$f'(x) = -\frac{8 \cdot 2x}{(4 + x^2)^2} = -\frac{16x}{(4 + x^2)^2}$$

e studiandone il segno:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -\frac{16x}{(4 + x^2)^2} > 0 \Rightarrow \frac{16x}{(4 + x^2)^2} < 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni: il numeratore assume segno positivo per $x > 0$, mentre il denominatore è positivo per ogni x in \mathbb{R} . Quindi $f'(x) > 0$ per $x < 0$, cioè la funzione f è crescente per $x < 0$, presenta un massimo in $x = 0$ (in cui assume valore $f(0) = 2$) e decresce per $x > 0$.



Studiamo ora la concavità della funzione, calcolandone la derivata seconda.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{16(4 + x^2)^2 - 16x \cdot 2(4 + x^2)2x}{(4 + x^2)^4} = -\frac{16(4 + x^2)^2 - 64x^2(4 + x^2)}{(4 + x^2)^4} = \\ &= -\frac{(4 + x^2)(64 + 16x^2 - 64x^2)}{(4 + x^2)^4} = \frac{48x^2 - 64}{(4 + x^2)^3} = \frac{16(3x^2 - 4)}{(4 + x^2)^3} \end{aligned}$$

Vediamo il segno di f'' :

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{16(3x^2 - 4)}{(4 + x^2)^3} > 0$$

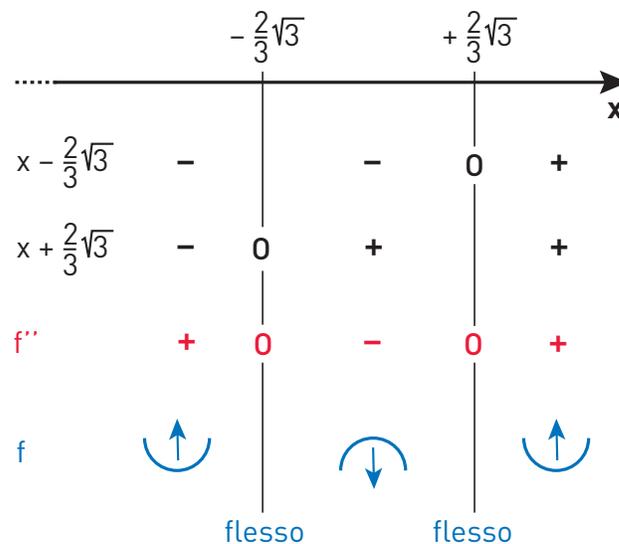
e studiamone separatamente numeratore e denominatore:

$$16(3x^2 - 4) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x > \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$(4 + x^2)^3 > 0 \Rightarrow 4 + x^2 > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Compiliamo nuovamente lo schema dei segni.

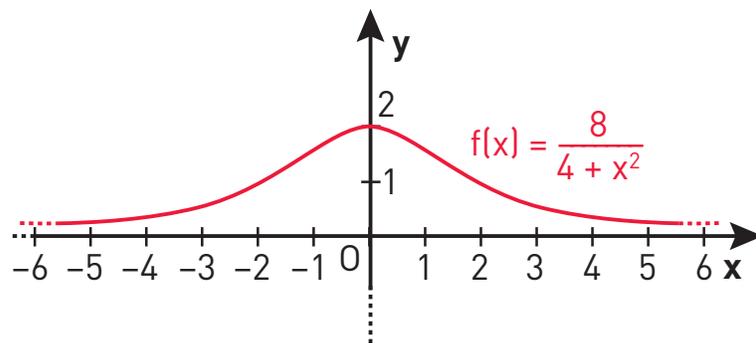


Notiamo che f è convessa per $x < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, concava per $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ e di nuovo convessa per $x > \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Vi sono dunque due punti di flesso, che chiameremo G e H , di coordinate:

$$f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{8}{4 + \frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \rightarrow G\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{8}{4 + \frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \rightarrow H\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right).$$

Con le informazioni dedotte finora, possiamo finalmente tracciare il grafico della funzione.



Cerchiamo le equazioni delle tangenti a Φ in $P(-2; 1)$ e $Q(2; 1)$. A tal fine, calcoliamo la pendenza delle tangenti in questi due punti.

$$f'(-2) = -\frac{16(-2)}{(4 + (-2)^2)^2} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

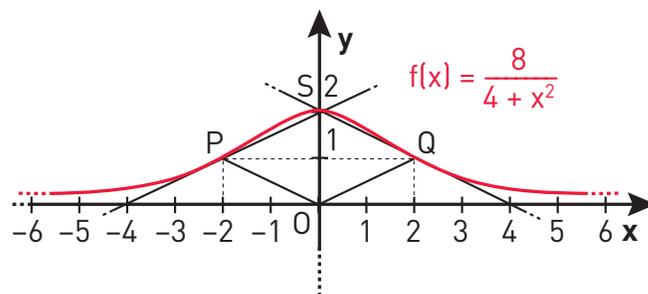
$$f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4 + 2^2)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$$

La generica retta per P è $y - 1 = m(x + 2)$. Allora deve valere $m = \frac{1}{2}$, dunque la tangente a Φ in P è

$$y - 1 = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow t_1 : y = \frac{1}{2}x + 2.$$

La generica retta per Q è $y - 1 = m(x - 2)$. Di nuovo, deve valere $m = -\frac{1}{2}$, dunque la tangente a Φ in Q è

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow t_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2.$$



Troviamo le coordinate del punto d'intersezione delle due rette t_1 e t_2 :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

e chiamiamo questo punto $S(0; 2)$.

Per verificare che il quadrilatero è un rombo, dobbiamo controllare che è un parallelogrammo e che i suoi quattro lati sono congruenti.

Verifichiamo dapprima che i lati sono a due a due paralleli. Troviamo l'equazione della retta che passa per OP :

$$r_{OP} : \frac{y}{1} = \frac{x}{-2} \Rightarrow r_{OP} : y = -\frac{1}{2}x$$

e l'equazione della retta che passa per OQ :

$$r_{OQ} : y = \frac{y}{2} = \frac{x}{1} \Rightarrow r_{OQ} : y = \frac{1}{2}x.$$

Dunque $r_{OP} \parallel t_2$ e $r_{OQ} \parallel t_1$, quindi $OQSP$ è un parallelogrammo. Calcoliamo ora le misure dei lati, ricordando la formula

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}.$$

$$\overline{OP} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\overline{PS} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\overline{SQ} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

dunque $OQSP$ è un rombo.

(In alternativa, una volta dimostrato che $OQSP$ è un parallelogrammo, si poteva scegliere di dimostrare che le sue diagonali sono perpendicolari tra loro; anche in questo modo si sarebbe potuto concludere che $OQSP$ è un rombo.)

Ricordiamo che, date due rette s e t , la tangente dell'angolo γ compreso tra le due è data da

$$\operatorname{tg} \gamma = \left| \frac{m_s - m_t}{1 + m_s m_t} \right|.$$

Dunque vale:

$$\operatorname{tg} S\hat{P}O = \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right| = \frac{4}{3} \Rightarrow S\hat{P}O \simeq 53^\circ 08'.$$

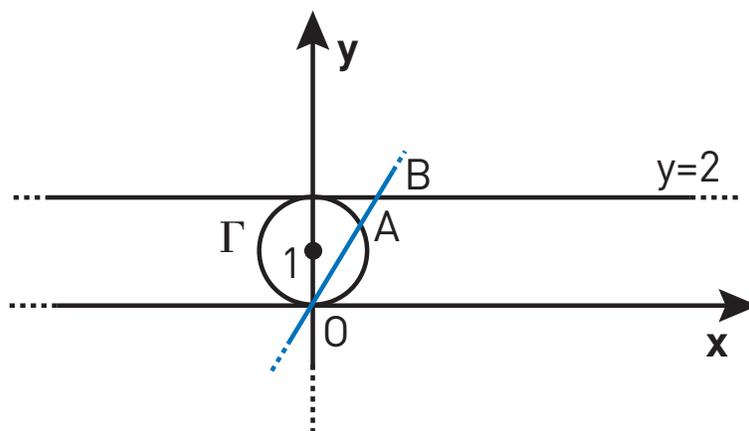
Poiché $OQSP$ è un rombo, $S\hat{P}O = S\hat{Q}O$ e $P\hat{S}Q = Q\hat{O}P = 180^\circ - S\hat{P}O = 180^\circ - 53^\circ 08' = 136^\circ 52'$.

2. La circonferenza Γ ha equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e l'equazione di una generica retta passante per l'origine è $t : y = mx$. Calcoliamo le coordinate di A .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = mx \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ x^2 + m^2x^2 - 2mx = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ x^2(m^2 + 1) - 2mx = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Per $x = 0$, otteniamo l'origine O . Possiamo quindi supporre $x \neq 0$ e semplificare la seconda equazione:

$$\begin{cases} y = mx \\ x(m^2 + 1) - 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{2m^2}{m^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow A \left(\frac{2m}{m^2 + 1}; \frac{2m^2}{m^2 + 1} \right).$$



Calcoliamo le coordinate di B :

$$\begin{cases} y = mx \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{m} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B \left(\frac{2}{m}; 2 \right).$$

Verifichiamo che (x_B, y_A) è un punto di Φ sostituendo nell'equazione $y = f(x)$. Deve valere:

$$y_A = \frac{8}{4 + x_B^2},$$

cioè

$$\begin{aligned}\frac{2m^2}{m^2+1} &= \frac{8}{4+\frac{4}{m^2}} \Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8}{\frac{4m^2+4}{m^2}} \\ &\Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8m^2}{4m^2+4} \\ &\Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{2m^2}{m^2+1}.\end{aligned}$$

Il punto (x_B, y_A) appartiene effettivamente a Φ .

3. Calcoliamo l'area di R con un integrale.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(R) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2} dx = 8 \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \\ &= 8 \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{2} \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} dx = 4 \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^2 = 4 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \pi.\end{aligned}$$

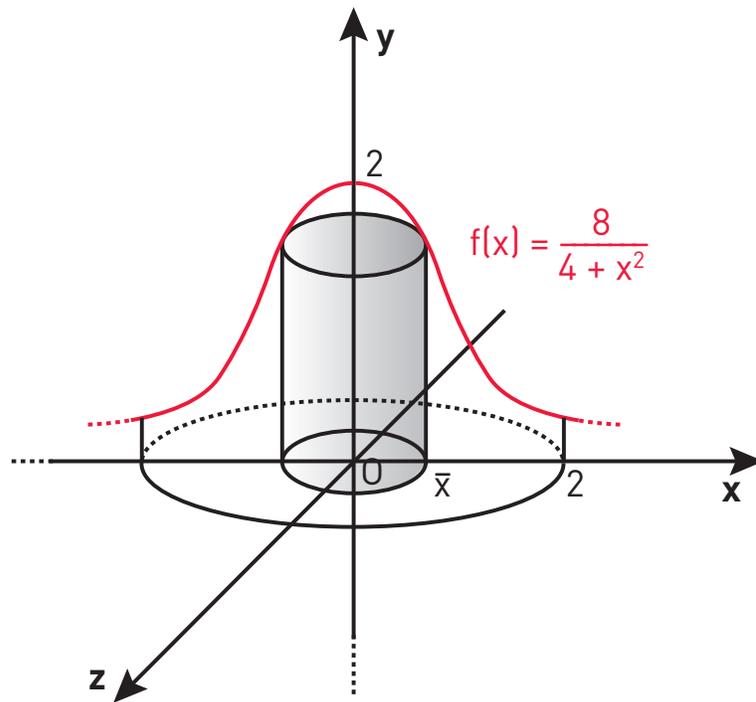
L'area del cerchio delimitato da Γ è invece data dalla formula

$$A_\Gamma = \pi r^2 = \pi.$$

Dunque R e il cerchio delimitato da Γ sono equivalenti. Calcoliamo ora l'area della regione compresa tra Φ e l'intero asse x : integriamo nell'intervallo illimitato $[0, +\infty[$, ricordando che $f(x)$ è pari.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2} dx = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{8}{4+t^2} dt = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right]_0^x = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi\end{aligned}$$

4. Prendiamo \bar{x} tale che $0 \leq \bar{x} \leq 2$ e consideriamo il cilindro la cui base è centrata in O e ha raggio \bar{x} , e la cui altezza è $f(\bar{x})$.



La superficie laterale del cilindro è data da $S(\bar{x}) = 2\pi\bar{x}f(\bar{x})$.

Per ottenere il volume di W basta dunque integrare $S(x)$ da 0 a 2:

$$V_W = 2\pi \int_0^2 x f(x) dx = 2\pi \int_0^2 \frac{8x}{4+x^2} dx.$$

Alternativamente, si poteva suddividere il volume ricercato in un cilindro (di raggio 2 e altezza $f(2) = 1$) e in un solido dato dalla rotazione attorno all'asse y del tratto di $f(x)$ compreso tra le ascisse 0 e 2.

Procedendo in questo modo, si poteva scrivere:

$$V = \pi r^2 h + \pi \int_1^2 g^2(y) dy$$

dove $f(x) = y = 8/(4+x^2)$, e dunque, invertendo, $g(y) = x = \sqrt{(8-4y)/y}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso. Possiamo invertire la formula per ricavare il seno dell'angolo compreso tra i due lati noti:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2A}{ab} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 1.$$

Dunque l'angolo compreso tra i due lati è retto e il triangolo è rettangolo. Possiamo quindi ricavare la misura del terzo lato con il teorema di Pitagora:

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

In alternativa, si può ottenere la stessa soluzione ricorrendo alla formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

detta A l'area del triangolo, p il suo semiperimetro e a , b e c i tre lati. Detto $c = x$ il lato incognito, sostituiamo i dati nella formula e otteniamo:

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{\left(\frac{5+x}{2}\right) \left(\frac{5+x}{2} - 2\right) \left(\frac{5+x}{2} - 3\right) \left(\frac{5+x}{2} - x\right)} \\ 3 &= \sqrt{\left(\frac{5+x}{2}\right) \left(\frac{1+x}{2}\right) \left(\frac{x-1}{2}\right) \left(\frac{5-x}{2}\right)} \\ 9 &= \left(\frac{25-x^2}{4}\right) \left(\frac{x^2-1}{4}\right) \\ x^4 - 26x^2 + 169 &= 0 \\ (x^2 - 13)^2 &= 0 \end{aligned}$$

che porta all'unica soluzione accettabile $x = \sqrt{13}$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Studiamo le condizioni di esistenza per la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

Dobbiamo determinare per quali valori

$$1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0,$$

il che presuppone di trovare i valori per cui $2 - \sqrt{3 - x} \geq 0$. Dobbiamo studiare quindi le condizioni di esistenza della radice presente in questa espressione, cioè stabilire quando $3 - x \geq 0$. Otteniamo $x \leq 3$.

Cerchiamo ora i valori per cui $2 - \sqrt{3 - x} \geq 0$, che sono i valori di x per cui $3 - x \leq 4$, cioè $x \geq -1$. Il campo di esistenza è pertanto $-1 \leq x \leq 3$.

Studiamo ora i valori per cui $1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \geq 0$, cioè

$$\sqrt{2 - \sqrt{3 - x}} \leq 1$$

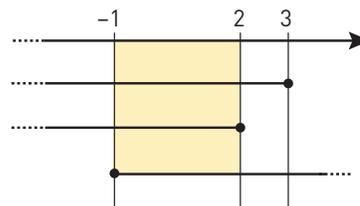
$$2 - \sqrt{3 - x} \leq 1$$

$$\sqrt{3 - x} \geq 1$$

$$3 - x \geq 1$$

che porta a $x \leq 2$.

Il dominio della funzione si ricava intersecando tutte le condizioni trovate, ed è quindi $-1 \leq x \leq 2$.



SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Dati i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$ in un sistema cartesiano ortogonale, tracciamo il segmento AB . Determiniamo poi la retta r passante per B e perpendicolare ad AB :

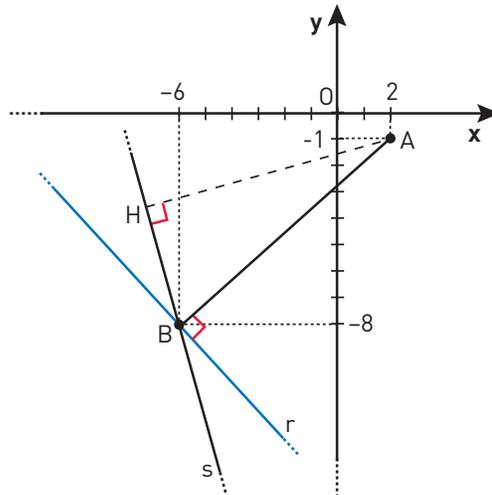
$$y - y_B = -\frac{1}{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}(x - x_B)$$

cioè

$$y + 8 = -\frac{1}{\frac{-8+1}{-6-2}}(x + 6)$$

da cui $y = -\frac{8}{7}x - \frac{104}{7}$ o, equivalentemente, $8x + 7y + 104 = 0$.

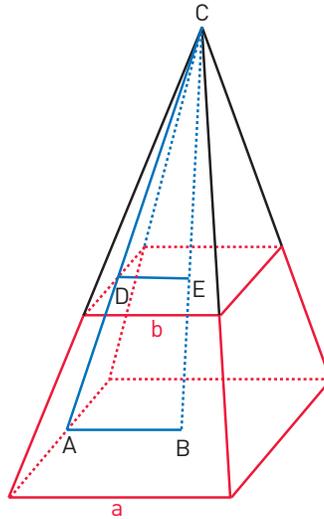
Tracciamo ora una generica retta s passante per B , distinta da r , e consideriamo la distanza AH , dove H è la proiezione ortogonale di A su s . Il triangolo ABH è rettangolo, con ipotenusa AB e cateto AH . Poiché $AB > AH$, allora AB è la distanza massima tra A e le rette passanti per B .



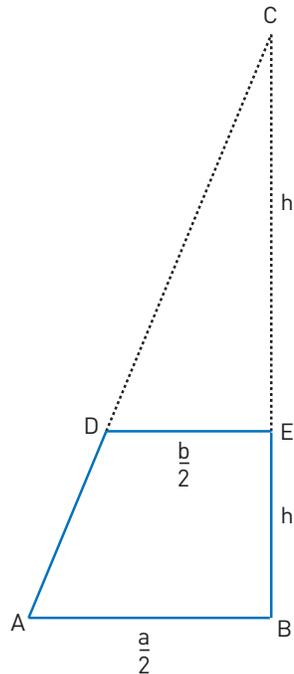
Si può quindi concludere che la retta per B avente massima distanza da A è la retta r .

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Sia T il tronco di piramide retta quadrata, di altezza h e lati di base a e b .



Consideriamo la sezione indicata nella figura sottostante.



I triangoli ABC e CDE sono simili perché rettangoli e con un angolo in comune. Dunque, considerando la notazione utilizzata nella figura, $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = (h + h') : h'$ e quindi

$$\frac{a}{2}h' = \frac{b}{2}h + \frac{b}{2}h'$$

$$h' = \frac{\frac{b}{2}h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{bh}{a-b}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P da cui il tronco è stato tagliato.

$$V_P = \frac{a^2(h+h')}{3} = \frac{a^2\left(h + \frac{bh}{a-b}\right)}{3} = \frac{a^2\frac{ah}{a-b}}{3} = \frac{a^3h}{3(a-b)}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P' di altezza h' , ottenuta sottraendo da P il tronco T :

$$V_{P'} = \frac{b^2h'}{3} = \frac{b^3h}{3(a-b)}$$

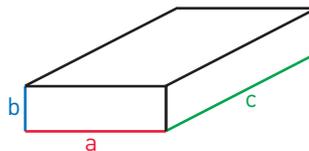
quindi il volume del tronco T si ricava facendo:

$$V_T = V_P - V_{P'} = \frac{h(a^3 - b^3)}{3(a-b)} = \frac{h(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3(a-b)} = \frac{h(a^2 + ab + b^2)}{3}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Schematizziamo la valigia come un parallelepipedo, come in figura.

In questo modo, possiamo esprimere il suo volume come $V = abc$.



Se le dimensioni aumentano del 10% i lati variano diventando $a_{10\%} = \frac{11}{10}a$, $b_{10\%} = \frac{11}{10}b$, $c_{10\%} = \frac{11}{10}c$ perché un aumento del 10% corrisponde a $1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$; il volume diventa quindi

$$V_{10\%} = a_{10\%}b_{10\%}c_{10\%} = \frac{1331}{1000}abc = \frac{1331}{1000}V = 133,1\%V.$$

Il volume quindi aumenta del 33,1%.

Se le dimensioni aumentano del 20% i lati variano diventando $a_{20\%} = \frac{6}{5}a$, $b_{20\%} = \frac{6}{5}b$, $c_{20\%} = \frac{6}{5}c$ perché un aumento del 20% corrisponde a $1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}$; il volume diventa quindi

$$V_2 = \frac{216}{125}V = \frac{1728}{1000}V = 172,8\%V.$$

Il volume aumenta quindi del 72,8%.

Se le dimensioni aumentano del 25% i lati diventano $a_{25\%} = \frac{5}{4}a$, $b_{25\%} = \frac{5}{4}b$, $c_{25\%} = \frac{5}{4}c$ perché un aumento del 25% corrisponde a $1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$; il volume diventa quindi

$$V_{25\%} = \frac{125}{64}V = \frac{195,3125}{100}V \simeq 195\%V.$$

Il volume aumenta quindi circa del 95%.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 6 CORSO DI ORDINAMENTO 2013</p>
--

Disponendo in ordine crescente i 5040 numeri che si possono formare come indicato nel quesito, è facile determinare quali saranno i primi 6 della lista (cioè i primi $3!$ – questa considerazione ci sarà utile in seguito):

1 234 567

1 234 576

1 234 657

1 234 675

1 234 756

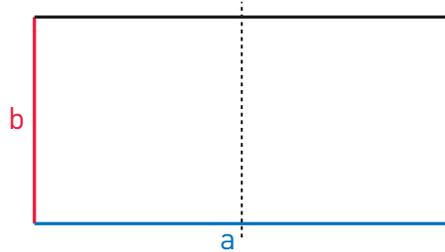
1 234 765

In tutti questi numeri le prime quattro cifre sono uguali a 1 234, mentre le rimanenti tre sono date da una permutazione di $\{5, 6, 7\}$. Il numero immediatamente successivo nella lista, cioè il settimo, sarà il più piccolo tra i numeri in cui la quarta cifra viene incrementata di uno: si tratta di 1 235 467.

Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che 721 equivale a $720 + 1 = 6! + 1$ e ragioniamo in modo simile a quanto appena visto. I primi $6!$ numeri saranno quelli la cui prima cifra è 1, mentre le rimanenti sei sono date da una permutazione di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Il numero immediatamente successivo nella lista, cioè il 721-esimo, sarà il più piccolo tra i numeri in cui la prima cifra viene incrementata di uno: si tratta di 2 134 567.

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

La misura dell'area del foglio di partenza è $A = 1 = ab$ secondo la notazione della figura:



Se i nuovi rettangoli ottenuti ritagliando il foglio a metà sono simili, $a : b = b : \frac{a}{2}$ che equivale a $\frac{a^2}{2} = b^2$. Mettiamo questa identità a sistema con $ab = 1$:

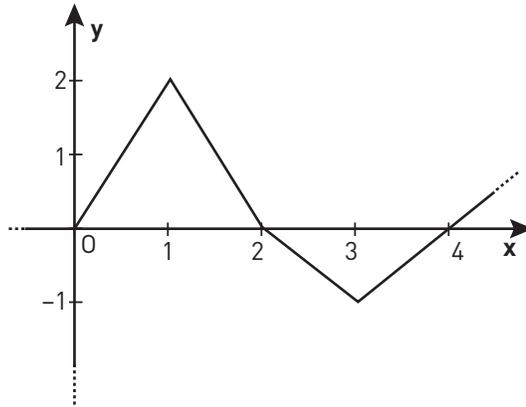
$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = 0 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}b \\ b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases}$$

quindi le misure dei lati sono:

$$\begin{cases} a = \sqrt[4]{2} \\ b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases} .$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Consideriamo la funzione $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. Poiché $f(x)$ è continua per $x > 0$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale la derivata della funzione integrale $g(x)$ esiste e vale $g'(x) = f(x)$.



Osservando il grafico in figura, si ricava che:

- per $x = 0 \vee x = 2 \vee x = 4$, $g'(x) = 0$;
- per $0 < x < 2 \vee x > 4$, $g'(x) > 0$ e la funzione $g(x)$ è crescente;
- per $2 < x < 4$, $g'(x) < 0$ e la funzione $g(x)$ è decrescente.

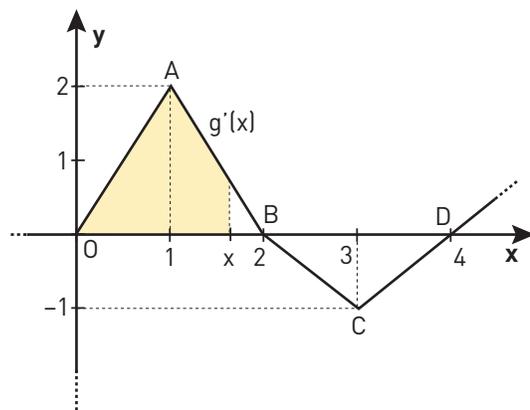
Dunque, il valore di x positivo per cui g ha un minimo è $x = 4$.

In alternativa, si poteva osservare che $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ rappresenta la somma algebrica

$S(x)$ delle aree sottese dal grafico, prese con i segni opportuni. Pertanto $S(x)$ è necessariamente minima per $x = 4$, quando all'area del triangolo OAB viene sottratta

l'area del triangolo BCD:

$$\min g = \min S = S(4) = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$



<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 9 CORSO DI ORDINAMENTO 2013</p>
--

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Raccogliamo $-\sin x$ al numeratore e sfruttiamo il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{-\sin x(1 - \cos x)}{x^2} = 4 \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 10 CORSO DI ORDINAMENTO 2013</p>

Tra i quattro grafici proposti, solo quello in A potrebbe essere quello di $f'(x)$.

Infatti, osservando il grafico di $f(x)$ si può dedurre che:

- $f'(-2) = f'(2) = 0$, perché i punti $x = -2$ e $x = 2$ sono stazionari (rispettivamente un punto di massimo e un punto di minimo relativo), ovvero perché le tangenti nei punti $(-2; f(-2))$ e $(2; f(2))$ sono parallele all'asse x .
- $f'(0) < 0$, perché la retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(0; 0)$ ha coefficiente angolare negativo. Ricordiamo infatti che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel generico punto $(x_0; f(x_0))$ è uguale a $f'(x_0)$.

Da quanto detto conseguono, rispettivamente, le seguenti condizioni sul grafico di $f'(x)$:

- Il grafico di $f'(x)$ interseca l'asse x per $x = -2$ e $x = 2$.
- Il grafico di $f'(x)$ interseca l'asse y nel semiasse delle ordinate negative.

L'unico grafico che rispetta entrambe le condizioni è il grafico A .

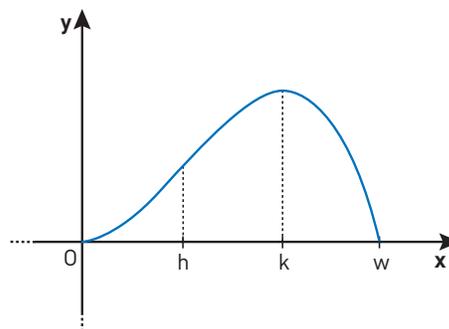
A. S. 2013-2014

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti scelti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x = h$ e $x = k$.



- 1) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
- 2) Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.
- 3) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w = 3$ e $g(1) = \frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y = \frac{2}{3}$.
- 4) Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y . Si spieghi perchè il volume di W si può ottenere calcolando:

$$\int_0^3 (2\pi x)g(x)dx.$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico Oxy , si dia la capacità in litri di W .

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano - lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

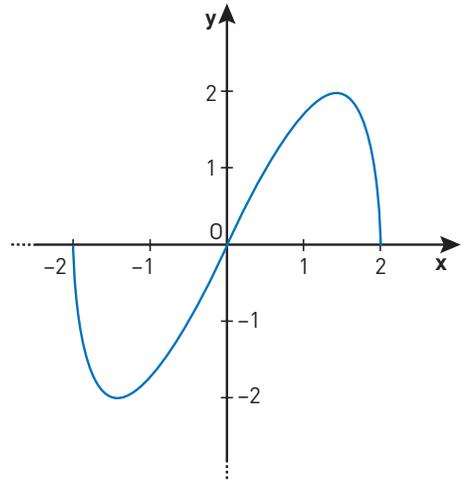
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

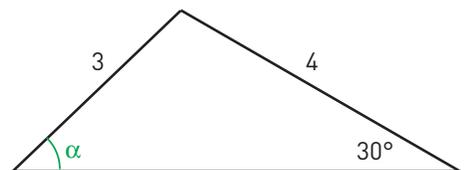
1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x .
3. Si disegni la curva di equazione $y^2 = x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.



4. Sia $h(x) = \text{sen}(f(x))$ con $0 \leq x \leq 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

QUESTIONARIO

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α ?



2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Nello sviluppo di $(2a^2 - 3b^3)^n$ compare il termine $-1080a^4b^9$. Qual è il valore di n ?
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x , l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.
5. Dei numeri $1, 2, 3, \dots, 6000$, quanti non sono divisibili né per 2, né per 3, né per 5?

6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?
7. Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0, k]$ è 9. Si determini k .
8. Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.
9. Si determini il dominio della funzione:

$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x + 5)}$$

10. Si determinino i valori reali di x per cui:

$$\left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right)^{x^2 - 6x + 1} = 1$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

1. Per determinare $f(0)$ e $f(k)$, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, che si può applicare essendo f continua per ipotesi:

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow g'(x) = f(x).$$

Per le ipotesi del problema, sappiamo che:

- $g'(0) = 0$, poiché il grafico di g è tangente all'asse x in 0 ;
- $g'(k) = 0$, perché g ha un massimo in $x = k$.

Quindi $f(0) = g'(0) = 0$ e $f(k) = g'(k) = 0$, cioè la funzione f interseca l'asse x in $x = 0$ e in $x = k$.

La funzione f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, w]$, quindi per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo assoluti.

Per studiare nel dettaglio l'andamento di f e tracciarne un probabile grafico, procediamo con lo studio della funzione.

Dal grafico di g notiamo anche che:

- $g'(x) > 0$ per $0 < x < k$, poiché g è crescente in questo intervallo;
- $g'(x) < 0$ per $k < x < w$, poiché g è decrescente in questo intervallo.

Siccome $f(x) = g'(x)$, scopriamo che $f(x)$ è positiva per $0 < x < k$ e negativa per $k < x < w$. In particolare, poiché f è definita anche negli estremi dell'intervallo, notiamo anche che $f(w) < 0$.

Passiamo allo studio della derivata prima: $f'(x) = g''(x)$, che è uguale a 0 per $x = h$ perché g presenta un flesso in quel punto per ipotesi. Quindi $x = h$ è un punto stazionario per f , ma per scoprire se è l'unico e se è un punto di massimo o minimo, dobbiamo studiare il segno di f' .

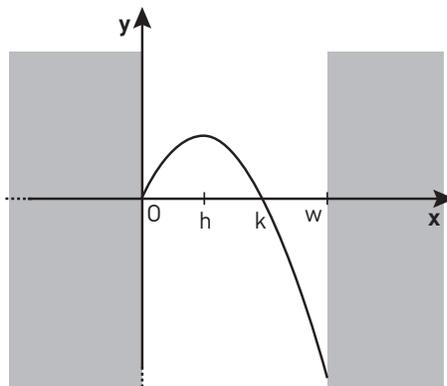
Dal grafico di g si evince che:

- $g''(x) > 0$ per $0 < x < h$, perchè la concavità di g in questo intervallo è rivolta verso l'alto;

- $g''(x) < 0$ per $h < x < w$, perchè la concavità di g in questo intervallo è rivolta verso il basso.

Poiché $f'(x) = g''(x)$, f è crescente per $0 < x < h$ e decrescente per $h < x < w$. Nel punto stazionario $x = h$ abbiamo quindi necessariamente un massimo di f , che è unico, mentre il minimo assoluto è in $x = 0$ oppure in $x = w$. Poiché $f(0) = 0$ e $f(w) < 0$, concludiamo che il minimo assoluto è in w .

Tracciamo un grafico indicativo di f in base alle informazioni raccolte.



2. Sapendo che la funzione $g(x)$ è polinomiale di terzo grado, possiamo esprimerla generalmente nella forma

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{con } a \neq 0.$$

La sua derivata prima in questo caso è dunque

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Dal grafico di g e per le ipotesi del problema, avevamo che $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$, quindi sostituendo $x = 0$ in entrambe le scritte, otteniamo che:

$$g(0) = d = 0 \quad \text{e} \quad g'(0) = c = 0.$$

Possiamo sostituire questi due valori nelle forme generali di g e g' :

$$g(x) = ax^3 + bx^2,$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

Calcoliamo anche la derivata seconda di g :

$$g''(x) = 6ax + 2b.$$

Dalle ipotesi del problema sappiamo che $g(w) = 0$, $g'(k) = 0$ e $g''(h) = 0$, quindi sostituendo i valori $x = w$, $x = k$ e $x = h$ nelle espressioni di g , g' e g'' , otteniamo:

$$\begin{cases} g(w) = aw^3 + bw^2 = 0 \Rightarrow w^2(aw + b) = 0 \Rightarrow aw + b = 0 \Rightarrow w = -\frac{b}{a} \\ g'(k) = 3ak^2 + 2bk = 0 \Rightarrow k(3ak + 2b) = 0 \Rightarrow 3ak + 2b = 0 \Rightarrow k = -\frac{2b}{3a} \\ g''(h) = 6ah + 2b \Rightarrow h = -\frac{b}{3a} \end{cases}$$

(poichè $w \neq 0$, $k \neq 0$ e $h \neq 0$). Ponendo $l = -\frac{b}{a}$, notiamo subito che:

$$h = \frac{1}{3}l, \quad k = \frac{2}{3}l, \quad w = l,$$

cioè i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.

3. Sostituiamo $w = 3$ nella formula generica di g trovata al punto precedente $g(x) = ax^3 + bx^2$, ricordando che $g(w) = 0$, e mettiamola a sistema con l'altra condizione $g(1) = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(3) = 3^3a + 3^2b = 0 \\ g(1) = a + b = \frac{2}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 27a + 9b = 0 \\ a + b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a - 3a = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ -2a = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi l'espressione di g ricercata è $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$.

Partiamo da questa espressione per ricercare le equazioni delle rette normali al grafico Γ di g nei punti di intersezione con la retta $y = \frac{2}{3}$.

Per calcolare le ascisse delle tangenti, poniamo a sistema l'equazione di g e della retta:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione, proviamo a scomporre il polinomio usando la regola di Ruffini. Poniamo $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e cerchiamo tra i divisori del termine noto $\{1, -1, 2, -2\}$, i valori di x che annullano il polinomio.

$$P(1) = 1 - 3 + 2 = 0,$$

quindi il polinomio è divisibile per $x - 1$. Dallo schema

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & // \end{array}$$

otteniamo $(x^3 - 3x^2 + 2) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$, che implica $x = 1$ oppure $x^2 - 2x - 2 = 0$. Troviamo le radici di quest'ultima equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Di esse solo $1 + \sqrt{3}$ è accettabile in quanto $1 - \sqrt{3} < 0$ non è compresa nel dominio della funzione. La retta $y = \frac{2}{3}$ interseca il grafico della funzione g nei due punti:

$$P_1 = \left(1, \frac{2}{3}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(1 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Calcoliamo i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle rette tangenti a g in P_1 e P_2 , che sono uguali ai valori della derivata di g calcolati nelle ascisse di P_1 e P_2 .

$$g'(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow \begin{cases} m_1 = g'(1) = 1 \\ m_2 = g'(1 + \sqrt{3}) = -2 \end{cases}$$

I coefficienti angolari n_1 e n_2 delle rette perpendicolari al grafico di g in P_1 e P_2 si ottengono ricordando che vale $n = -\frac{1}{m}$. Quindi $n_1 = -1$, $n_2 = \frac{1}{2}$.

L'equazione di un fascio di rette di centro (x_0, y_0) è

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

quindi le due rette normali al grafico di g passanti per P_1 e P_2 hanno equazioni

$$y - \frac{2}{3} = -(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + \frac{5}{3},$$

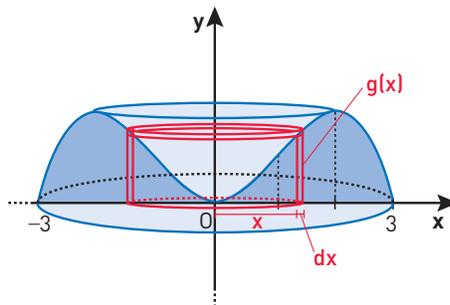
$$y - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \left(x - (1 + \sqrt{3})\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Suddividiamo il solido W in cilindri cavi di spessore dx . Ciascuno di essi ha come base una corona circolare di raggio x e spessore dx , quindi il suo volume è pari a

$$V(x) = \text{base} \cdot \text{altezza} = (2\pi x \cdot dx) \cdot g(x).$$

Il volume di W si ottiene quindi sommando questi cilindri:

$$V(W) = \int_0^3 V(x) = W = \int_0^3 (2\pi x)g(x)dx,$$



da cui

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^3 (2\pi x) \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) dx = 2\pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3 \right) dx = 2\pi \left[-\frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \\ &= 2\pi \left(-\frac{81}{5} + \frac{81}{4} \right) = \frac{81}{10}\pi. \end{aligned}$$

Se il sistema monometrico Oxy ha unità di misura fissata in decimetri, notiamo che il solito W ha volume pari a $\frac{81}{10}\pi \simeq 25,45$ in dm^3 , pari a 25,45 litri.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2 CORSO DI ORDINAMENTO 2014

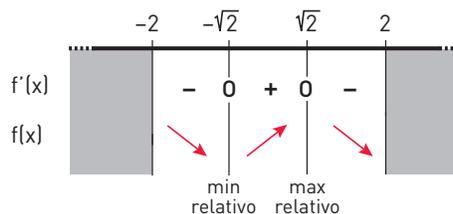
1. Per calcolare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x)$, ne calcoliamo la derivata $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{4-x^2} + x \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} \\
 &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\
 &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}
 \end{aligned}$$

La derivata esiste per $x \in]-2; 2[$. Studiamo il segno della derivata.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \\
 4-2x^2 &> 0 \\
 x^2-2 &< 0 \\
 -\sqrt{2} &< x \leq \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

La derivata ha segno positivo (e f è crescente) per $x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ e ha segno negativo (e f è decrescente) per $x \in]-2; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; 2[$, come si vede dal quadro dei segni di $f'(x)$:



Poiché agli estremi del dominio $f(-2) = f(2) = 0$, risulta:

$$x = -\sqrt{2} \text{ è un punto di minimo assoluto, con } f(-\sqrt{2}) = -2;$$

$x = \sqrt{2}$ è un punto di massimo assoluto, con $f(\sqrt{2}) = 2$.

2. L'origine O è centro di simmetria per il grafico Γ della funzione se $f(x)$ è dispari, cioè se $f(-x) = -f(x)$.

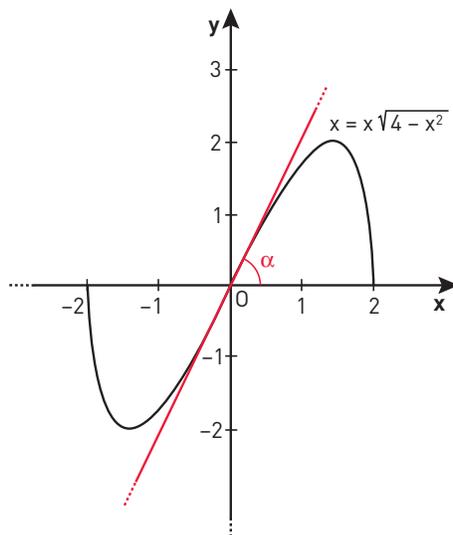
$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

La funzione f è dispari, per cui possiamo dire che O è centro di simmetria per Γ .

Calcoliamo il valore della derivata prima di f in $x = 0$ per trovare l'angolo α che la tangente in O a Γ forma con l'asse delle x :

$$f'(0) = \frac{4 - 0}{\sqrt{4 - 0}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2 = \text{tg } \alpha,$$

quindi $\alpha = \text{arctg } 2 \simeq 63^\circ 26'$



3. La curva $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è definita per valori di x che rendono $x^2(4 - x^2) \geq 0$, poiché y^2 assume sempre valori positivi:

$$x^2(4 - x^2) \geq 0$$

$$4 - x^2 \geq 0$$

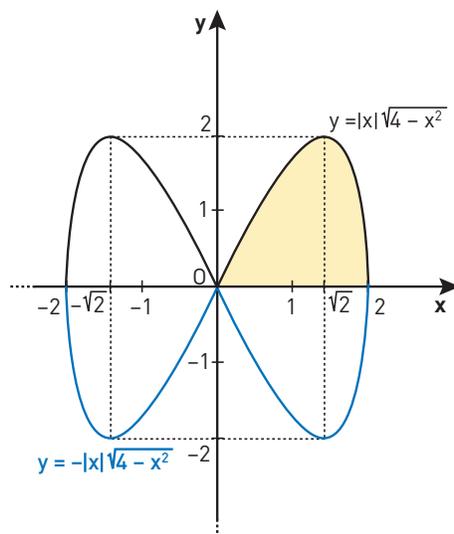
$$-2 \leq x \leq 2$$

Quindi le condizioni di esistenza della curva sono $x \in [-2; 2]$.

Scriviamo la curva come funzione di x , il grafico della curva è composto dal grafico di due funzioni:

$$g_1(x) = |x|\sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad g_2(x) = -|x|\sqrt{4 - x^2}.$$

Osserviamo che l'unione dei grafici di g_1 e g_2 è congruente all'unione del grafico Γ e del suo simmetrico rispetto all'asse x .



Il grafico della curva $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è composto da quattro parti congruenti: per calcolarne l'area racchiusa basta calcolare l'area racchiusa da una delle quattro parti e poi moltiplicare per quattro il valore ottenuto.

$$\mathcal{A} = 4 \cdot \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx$$

Riconduciamo l'integrale alla forma $\int_0^2 t'(x) \cdot \sqrt{t(x)} dx$ moltiplicando e dividendo per -2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{4}{-2} \cdot \int_0^2 -2x\sqrt{4-x^2} dx = \\ &= -2 \left[\frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \\ &= -2 \cdot \frac{2}{3} \left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \\ &= -\frac{4}{3} (0 - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{64} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

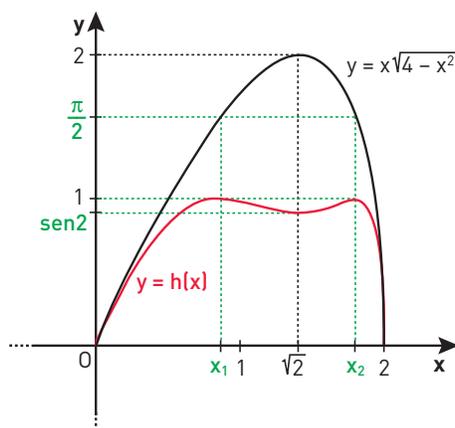
4. Consideriamo la funzione $h(x) = \text{sen}(f(x))$, con $0 \leq x \leq 2$.

Studiamo l'andamento di h confrontandolo con quello di f nell'intervallo $[0; 2]$.

Dallo studio di f , sappiamo che, per $0 \leq x \leq 2$, f assume valori compresi tra 0 e 2, in particolare assume il valore $\frac{\pi}{2}$ due volte, nei punti x_1, x_2 . In tali punti si ha $h(x_1) = h(x_2) = 1$. Inoltre $h(0) = h(2) = \sin 0 = 0$.

Per $0 < x < x_1$, la funzione f cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, quindi h cresce da 0 a 1 nello stesso intervallo. Analogamente, h decresce da 1 a 0 nell'intervallo $x_2 < x < 2$.

Nell'intervallo $x_1 < x < \sqrt{2}$, la funzione f cresce da $\frac{\pi}{2}$ a 2, quindi h decresce da 1 a $\sin 2$. Nell'intervallo $\sqrt{2} < x < x_2$ f decresce da 2 a $\frac{\pi}{2}$, quindi h cresce da $\sin 2$ a 1.



Osservando il grafico, possiamo vedere che la funzione h ha:

- due massimi assoluti nei punti $x = x_1 \in]0; \sqrt{2}[$, $x = x_2 \in]\sqrt{2}; 2[$, con $h(x_1) = h(x_2) = 1$;
- due minimi assoluti nei punti $x = 0$, $x = 2$, con $h(0) = h(2) = 0$;
- un minimo relativo nel punto $x = \sqrt{2}$, con $h(\sqrt{2}) = \sin 2$.

I valori di k per cui l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte sono quelli per cui la retta $y = k$ incontra il grafico di h in quattro punti distinti, quindi per $k \in]\sin 2; 1[$.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 1 CORSO DI ORDINAMENTO 2014</p>
--

Il teorema dei seni afferma che in un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti. Applicando questo teorema al triangolo in figura, otteniamo che

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin \alpha}$$

da cui si ricava

$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Utilizzando la calcolatrice, calcoliamo la misura dell'angolo α :

$$\alpha = \arcsen \frac{2}{3} \simeq 41,8103149^\circ \simeq 41^\circ 49'$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Inoltre, per un noto teorema di geometria solida, in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore strettamente di 360° . Se le facce del poligono regolare sono esagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 120° , quindi non si possono avere poliedri le cui facce siano esagoni perché la somma degli angoli di tre facce è 360° , il che è impossibile.

<p style="text-align: center;">SOLUZIONE DEL QUESITO 3 CORSO DI ORDINAMENTO 2014</p>
--

Osserviamo che:

$$-1080 a^4 b^9 = -10 \cdot 4a^4 \cdot 27b^9 = (2a^2)^2 \cdot (-3b^3)^3 \cdot 10.$$

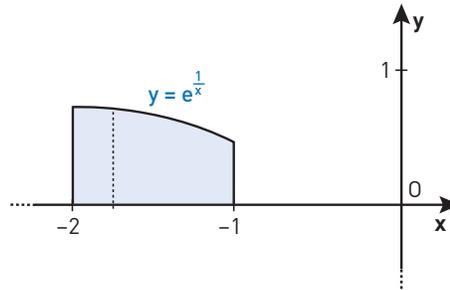
Quindi, siccome $2 + 3 = 5$, tale termine dovrà comparire nello sviluppo di una quinta potenza di $(2a^2 - 3b^3)$.

In effetti notiamo, dal triangolo di Tartaglia, che $(x + y)^5$ contiene il termine $10 \cdot x^2 y^3$.

Quindi il valore di n cercato è 5.

SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Nella figura è riportata la regione R di piano compresa tra il grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e l'asse x , con $-2 \leq x \leq -1$.



Il solido Ω con base R ha come sezioni perpendicolari all'asse x rettangoli con altezza definita dalla funzione $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Il volume V del solido Ω può quindi essere visto come la somma integrale di parallelepipedi la cui area di base è $e^{\frac{1}{x}} dx$ e l'altezza è $\frac{1}{x^2}$:

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx.$$

Risolviamo l'integrale:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = - \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= - \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_{-2}^{-1} = - \left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

La risposta al quesito è 1600.

Vediamo come è possibile ottenere tale risultato con due metodi differenti.

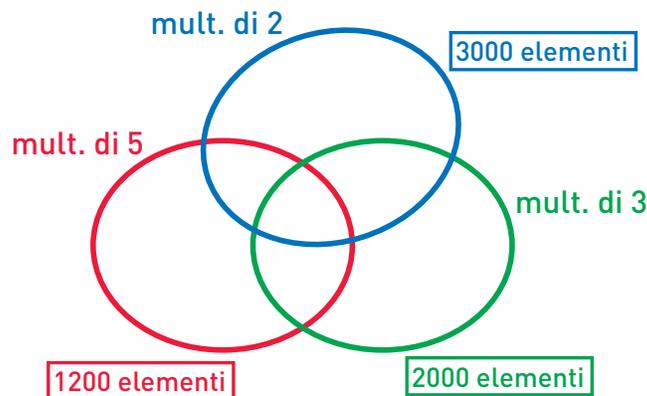
Primo metodo

Per determinare i numeri non divisibili per i numeri 2, 3 e 5, sottraiamo a 6000 il numero dei multipli di 2, 3 o 5.

I multipli di 2 nell'intervallo richiesto sono $6000 : 2 = 3000$.

I multipli di 3 sono $6000 : 3 = 2000$.

I multipli di 5 sono $6000 : 5 = 1200$.



Sarebbe un errore contare il numero dei multipli di 2, 3 o 5 semplicemente sommando i tre risultati trovati, in quanto conteremmo più volte i multipli comuni (ad esempio il numero 6 è stato contato sia tra i multipli di 2 sia tra quelli di 3). Tra l'altro otterremmo un risultato assurdo poiché la somma $3000 + 2000 + 1200 = 6200$ è maggiore di 6000.

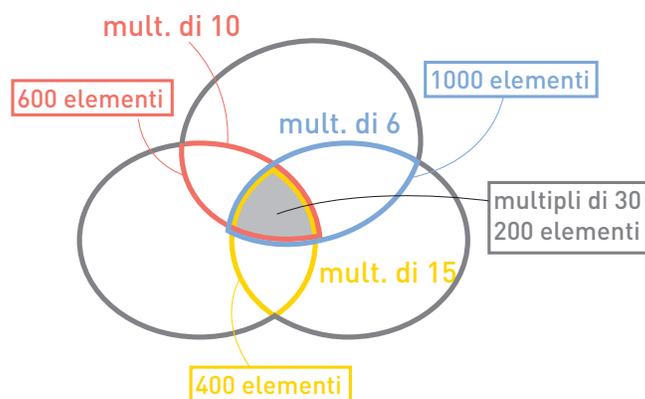
Dobbiamo quindi contare il numero dei multipli comuni per sottrarli a 6200. Osserviamo che i numeri 2, 3 e 5 sono primi tra loro, quindi i multipli comuni di due di essi sono i multipli del loro prodotto.

I multipli comuni di 2 e di 3 sono i multipli di 6 che nell'intervallo richiesto sono $6000 : 6 = 1000$.

I multipli di 10 sono $6000 : 10 = 600$.

I multipli di 15 sono $6000 : 15 = 400$.

I multipli di 30 sono $6000 : 30 = 200$.



Siamo pronti ora a calcolare il totale dei multipli di 2, 3 o 5 sottraendo a 6200 i multipli di 6, i multipli di 10 e di 15, aggiungendo poi l'intersezione formata dai multipli di 30 che altrimenti non verrebbe più contata.

$$6200 - 1000 - 600 - 400 + 200 = 4400.$$

Ne segue, quindi, che la risposta al quesito è $6000 - 4400 = 1600$.

Secondo metodo

Osserviamo che ogni 30 numeri la divisibilità per 2, 3, 5 si ripete, ovvero a è divisibile per 2, 3 o 5 se e solo se $a + 30$ è divisibile per 2, 3 o 5.

Quindi ci basta contare quanti numeri non sono divisibili per 2, 3, 5 tra 1 e 30, e poi moltiplicare per quanti intervalli di numeri tra 1 e 30 stiamo considerando.

È molto facile verificare che i numeri tra 1 e 30 non divisibili per 2, 3 o 5 sono:

1 7 11 13 17 19 23 29

in totale sono 8.

Tra 1 e 6000 stiamo considerando 200 intervalli, quindi la risposta finale è:

$$8 \cdot 200 = 1600.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Consideriamo il parallelepipedo di altezza h che ha per base un quadrato di lato l .
Il volume V di questo solido risulta

$$V = l^2 \cdot h \rightarrow l^2 \cdot h = 5 \text{ L} = 5 \text{ dm}^3$$

cioè, omettendo l'unità di misura dm^3 ,

$$l^2 \cdot h = 5$$

La superficie totale S del solido è:

$$S = 2l^2 + 4l \cdot h.$$

Poniamo a sistema questa relazione con quella trovata in precedenza:

$$\begin{cases} l^2 \cdot h = 5 \\ S = 2l^2 + 4l \cdot h \end{cases} \quad \begin{cases} h = \frac{5}{l^2} \\ S = 2l^2 + 4l \cdot \frac{5}{l^2} \end{cases}$$

da cui si ricava $S = \frac{2l^3 + 20}{l}$.

Consideriamo la funzione corrispondente

$$y = \frac{2x^3 + 20}{x} \text{ con } x > 0.$$

Calcoliamo la sua derivata:

$$y' = \frac{6x^2 \cdot x - (2x^3 + 20)}{x^2} \rightarrow y' = \frac{4x^3 - 20}{x^2}.$$

Studiamo il suo segno nell'intervallo $]0; \infty[$:

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^3 > 5 \rightarrow x > \sqrt[3]{5}$$

La funzione è:

- crescente per $x > \sqrt[3]{5}$;
- decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{5}$;

- ha minimo per $x = \sqrt[3]{5} \approx 1,71$.

Le dimensioni della lattina, arrotondate ai dm, sono quindi:

$$l = \sqrt[3]{5} \text{ dm}$$

$$h = \frac{5 \text{ dm}}{l^2} = \frac{5 \text{ dm}^3}{(\sqrt[3]{5})^2 \text{ dm}^2} = \sqrt[3]{5} \text{ dm}.$$

Si conclude che il parallelepipedo che soddisfa la richiesta è un cubo di lato

$$l = \sqrt[3]{5} \text{ dm} \approx 1,71 \text{ dm} = 171 \text{ mm}.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 7
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Data una $f(x)$ continua in un intervallo $[a; b]$, il suo valore medio integrale è

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Sotto la condizione $k > 0$ risulta:

$$\frac{1}{k-0} \int_0^k x^3 dx = 9 \rightarrow \frac{1}{k} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^k = 9 \rightarrow \frac{1}{k} \cdot \frac{k^4}{4} = 9 \rightarrow k^3 = 36 \rightarrow k = \sqrt[3]{36}$$

che è una soluzione accettabile.

Si potrebbe anche intendere il valor medio del teorema di Lagrange; il teorema è applicabile alla funzione $f(x) = x^3$, che è funzione polinomiale e quindi derivabile in \mathbb{R} . Risulta quindi, con $k > 0$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ con } c \in]a; b[$$

cioè, applicandola al nostro caso

$$\frac{f(k) - f(0)}{k - 0} = 9 \rightarrow \frac{k^3 - 0}{k - 0} = 9 \rightarrow k^2 = 9$$

cioè $k = \pm 3$. L'unica soluzione accettabile è $k = 3$.

SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO ORDINAMENTO 2014

Il generico polinomio di quarto grado è del tipo

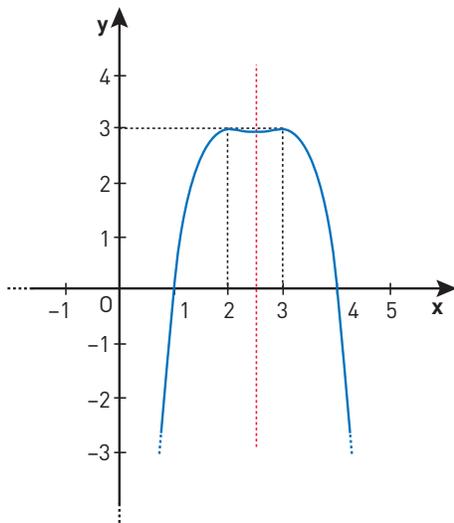
$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

e la sua derivata prima è

$$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d.$$

Sappiamo che la funzione $P(x)$ assume il suo valore massimo 3 per $x = 2$ e $x = 3$: ciò significa che $P'(2) = P'(3) = 0$ e che $P(2) = P(3) = 3$. Inoltre, sappiamo che $P(1) = 0$.

Le condizioni proposte rendono il grafico della curva simmetrico rispetto alla retta $x = \frac{5}{2}$, per cui, se $P(1) = 0$, allora anche $P(4) = 0$, essendo il punto $(1; 0)$ simmetrico di $(4; 0)$ rispetto alla retta $x = \frac{5}{2}$.



Si poteva anche ragionare nel seguente modo. I coefficienti del polinomio sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 32a + 12b + 4c + d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 3 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 3 \\ a + b + c + d + e = 0 \end{cases}$$

che, risolto, conduce alle soluzioni $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{15}{2}$, $c = -\frac{111}{4}$, $d = 45$, $e = -24$.

Dunque

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 - \frac{111}{4}x^2 + 45x - 24,$$

e quindi

$$P(4) = -\frac{3}{4} \cdot 4^4 + \frac{15}{2} \cdot 4^3 - \frac{111}{4} \cdot 4^2 + 45 \cdot 4 - 24 = 0.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

Consideriamo la funzione irrazionale $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x + 5)}$. Stabiliamo la condizione di realtà della radice quadrata e dell'argomento del logaritmo:

$$\begin{cases} 3 - \log_2(x + 5) \geq 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x + 5) \leq 3 \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x + 5) \leq \log_2(8) \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5 \leq 8 \\ x > -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

pertanto i valori accettabili sono $-5 < x \leq 3$. Il dominio della funzione data è pertanto

$$-5 < x \leq 3.$$

SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

La funzione esponenziale è uguale a 1 quando l'esponente è uguale a 0 e la base è qualsiasi, oppure quando la base è uguale a 1 e l'esponente è qualsiasi.

Nel primo caso, i valori reali di x che soddisfano l'uguaglianza sono i valori che annullano l'esponente di $(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26))^{x^2 - 6x + 1}$, cioè le radici del polinomio di secondo grado $x^2 - 6x + 1$:

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Il discriminante è $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 3^2 - 1 = 8$, quindi le due radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

che sono i valori che stavamo cercando.

Dobbiamo però assicurarci che non esistano valori di x per i quali potremmo ottenere una forma non definita del tipo 0^0 . A tale scopo, studiamo la base della funzione esponenziale: $\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)$.

$$\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 26 = 0.$$

Il discriminante è $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 5^2 - 26 = -1$, che è sempre negativo, quindi non esistono valori di x che annullano il polinomio $x^2 - 10x + 26$. I valori di x trovati in precedenza sono dunque tutti ammissibili.

Nel secondo caso, dobbiamo trovare i valori di x per i quali la base della funzione esponenziale è uguale a 1.

$$\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26) = 1 \Rightarrow x^2 - 10x + 26 = 5 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Il discriminante è $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 5^2 - 21 = 4$, quindi le radici del polinomio sono:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 7.$$

Entrambi i valori sono ammissibili poiché, se sostituiti all'equazione iniziale, non danno luogo alla forma indeterminata 1^∞ .

In conclusione, l'insieme dei valori reali di x che verificano l'uguaglianza iniziale è $\{3 \pm 2\sqrt{2}, 3, 7\}$.

Una risoluzione alternativa del quesito parte dal passaggio iniziale di conversione dell'equazione esponenziale in un'equazione logaritmica:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right)^{x^2 - 6x + 1} &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 - 6x + 1) \log\left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Con la legge di annullamento del prodotto si ottengono i valori reali di x che soddisfano l'uguaglianza.