

Un approccio minimo ai concetti di

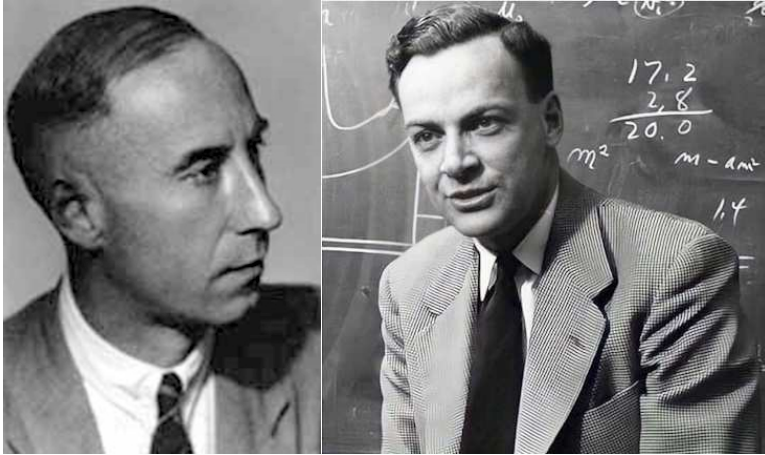
# **Materia e anti-Materia**

con un'appendice sul Tensore Elettromagnetico

[livello intermedio]

claudio magno

**Richard Phillips Feynman (1918-1988)**



**Johann Melchior Ernst Karl  
Gerlach Stüeckelberg (1905-1984)**

## INDICE

INTRODUZIONE	P. III
--------------	--------

• L'ENERGIA DI UNA PARTICELLA LIBERA	P. 1
• LA QUESTIONE DELL'INTERPRETAZIONE DELLO <i>SPAZIOTEMPO</i> EINSTEINIANO	P. 2
• L'INTERPRETAZIONE DI STÜCKELBERG-FEYNMAN	P. 3
• L'INTERPRETAZIONE DELL'INVERSIONE TEMPORALE	P. 3

APPENDICE	P. 5
LA RAPPRESENTAZIONE COVARIANTE DEL TENSORE <b>EM</b> (ELETTROMAGNETICO O DI MAXWELL)	

BIBLIOGRAFIA	P.
--------------	----

## INTRODUZIONE

Questo notebook brevissimo ha più il carattere di un'*overview* estemporanea, un *excursus* semi-storico 'alla buona' su un tema fondamentale – quello del riconoscimento dell'esistenza dell'anti-Materia – che sta gettando un'ombra lunghissima fin dentro le problematiche astrofisiche correnti, i.e., in ultima analisi, della Cosmologia Gravitazionale e della nostra rappresentazione *quanto-relativistica* consolidata dell'Universo Fisico osservabile e misurabile.

I responsabili 'visionari' di questo fondamentale passo concettuale in avanti, ricco di ramificazioni e implicazioni di portata imprevedibile, sono stati J. E. Stückelberg – geniale (e sfortunato) fisico teorico e matematico dell'E. T. H. (Eidgenössische Technische Hochschule) di Zurigo – e il grandissimo R. P. Feynman, del Caltech, CA. Nonostante i due avessero lavorato in modo indipendente sul problema, Feynman riconobbe, poi, pubblicamente a Stückelberg, con l'onestà intellettuale che lo contraddistinse per tutta la vita, la priorità *temporale* di intuito riguardo alla 'strada giusta' da imboccare e, quindi, la legittimità *doverosa* di condivisione del Premio Nobel 1965 con Stückelberg. Purtroppo, la miopia ottusa del comitato organizzatore del Premio (unita a pressioni inevitabili (e scontate) ma estranee alla Scienza) trovò un paravento assai conveniente dietro alla figura ormai quasi leggendaria di Feynman.

Si chiama *vita collettiva*, affascinante e miserabile al tempo stesso, ingombrata da servi sciocchi e 'narcisi' smaniosi ma avara per quanto riguarda personalità di vero spessore complessivo. E, anche nella Fisica, non è stata l'unica volta né, con ogni probabilità, sarà l'ultima ...

C M

## Materia e anti-Materia

Il concetto di anti-Materia si è sviluppato autonomamente e in modo naturale nel momento in cui si è riusciti a unificare la Meccanica Quantistica e la Relatività Ristretta, alla fine degli anni '20. Le verifiche sperimentali arrivarono fin dai primi anni '30.

Oggi, in diagnostica medica, viene prodotta anti-Materia nella tomografia PET (POSITRON EMISSION TOMOGRAPHY), dove sono utilizzati *anti-elettroni*, più comunemente noti come *positroni*.

È particolarmente istruttivo seguire il percorso concettuale che, dalla Relatività Speciale Einsteiniana, ha portato a ipotizzare l'esistenza dell'anti-Materia su scala cosmico-gravitazionale, ripercorrendo i passaggi logici fondamentali su cui poggia il concetto di *anti-particella*, da cui emerge la combinazione tra Fisica Quantistica e Relatività Generale.

### • L'Energia di una particella libera

In Meccanica Quantistica ordinaria, l'Energia di una *particella libera* avente *quantità-di-moto* (o *momento lineare*)  $p$  e Massa  $m$  si ricava introducendo la soluzione di *onda piana* (tale espressione quantistica caratterizza una particella 'non-soggetta a forze esterne') nell'*Equazione di Schrödinger* (3-dim). Il risultato, in regime *non-relativistico*, è

$$E = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2. \quad (1)$$

Invece, la Relatività di Einstein *impone* che tale espressione matematica per l'Energia sia solo la versione *approssimata* della più *fondamentale* seguente:

$$E = (\mathbf{p}^2 c^2 + (mc^2)^2)^{1/2}, \quad (2)$$

dove,  $c$  è la velocità del segnale EM nel Vuoto e  $m = \gamma m_0$ , con  $m_0$  la *Massa-a-riposo* corrispondente.

Ora, si consideri l'approssimazione di quantità-di-moto  $p$  'molto piccole' nel regime di *equivalenza* Energia-Massa,  $E = mc^2$ . Dalla Massa  $m$  di una particella *in moto relativistico*, espressa mediante *espansione binomiale*,

$$m \equiv m_0 \gamma = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right), \quad (3)$$

si determina l'espressione dell'Energia Totale di una particella libera, Energia ridotta alla sola parte *cinetica*  $K$ ,

$$\begin{aligned} E &\equiv K = m_0 (\gamma - 1) c^2 = (m_0 \gamma - m_0) c^2 \\ &= \left( m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right) - m_0 \right) c^2 \equiv m_0 \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right) c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2, \end{aligned} \quad (4)$$

i.e., il risultato *classico*, residuale dalla *cancellazione approssimante*, formalmente giustificata quando  $v \ll c$ .

La Fisica funziona così: quella che oggi sembra la forma definitiva di un'equazione, classica o quantistica, si ridurrà all'approssimazione di una versione più completa che *potrebbe* essere scoperta in futuro. Lo schema è sempre lo stesso: un'equazione del moto non-relativistica è, sostanzialmente, la versione approssimata della sua *estensione relativistica*, che, a tutt'oggi, è assunta come *la più fondamentale possibile* poiché rispetta il *Principio di Relatività* Einsteiniana.

Il problema nasce, qui, dal tentativo di rendere *relativistica* l'Equazione di Schrödinger. Infatti, il Principio di Relatività *ne cambia significativamente la struttura matematica*. Il calcolo dell'Energia Totale di una particella sia *libera* che *relativistica* con l'Equazione di Schrödinger portò all'esistenza di una *coppia* di soluzioni *relativistiche* formalmente corrette ma *ambigue* riguardo alla loro *interpretazione fisica*:

$$E = \pm (\mathbf{p}^2 c^2 + (mc^2)^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Qui sta il problema: la struttura matematica della *rappresentazione relativistica* dell'Equazione di Schrödinger (1) ci pone davanti a un bivio: essa non dà, semplicemente,  $E$ , secondo l'Eq. (2), ma anche l'espressione opposta  $-E$ !

Per la prima volta in Fisica, l'equazione del moto di una particella libera ci impone che l'Energia possa avere sia un valore sia negativo che positivo. Dunque, perché non rigettiamo  $-E$ , se riteniamo assurdo che esistano particelle libere dotate di Energia (Totale) negativa, come si pretende nel Mondo Reale?

Stavolta no: scegliamo di portare la matematica relativistica alle sue conseguenze estreme (atteggiamento che, finora, sembra abbia portato sempre ad avanzamenti rivoluzionari nella Fisica!). Fingiamo che esista una particella (libera) dotata di Energia Totale *negativa*. Quali ne risulterebbero le proprietà dinamiche?

L'Energia in Meccanica Quantistica descrive l'*evoluzione temporale* della dinamica di una particella *libera*. Il parametro

di evoluzione temporale è un fattore dato, nella cosiddetta ‘*rappresentazione di Schrödinger*’, da

$$e^{iEt} \equiv e^{i(p^2/(2m))t}, \quad (6.1)$$

una forma esponenziale di un certo numero complesso *unitario*, nel quale, l’esponente è espresso dal prodotto tra l’unità immaginaria,  $i$ , e, *più importante*, tra il valore dell’Energia,  $E$ , e quello della coordinata temporale,  $t$ . Se l’Energia di una particella libera è *negativa*, questo prodotto va modificato così da *conservare il carattere formale* (i.e., *matematico*) *intrinseco alla rappresentazione*. Quindi, se  $E < 0$ , il parametro esponenziale va riscritto come

$$e^{-iEt} \equiv e^{-i(p^2/(2m))t}. \quad (6.2)$$

Ora, è il caso di ricordare che, dalla non-accettabilità che una particella (libera) possa avere Energia Totale negativa, seguirebbero non pochi problemi circa la stabilità stessa della Materia. Infatti, l’Energia priva di un suo *limite inferiore* genererebbe un regime *catastrofico*: la Natura, *spontaneamente e senza eccezioni*, tenderebbe a *evolvere in micro-stati collettivi definitivamente stazionari* (in media), di *minore Energia possibile (condensazione)*.

Ma, allora, c’è un modo alternativo di interpretazione del prodotto  $-iEt$ , continuando a seguire ciò che la Relatività prescrive riguardo alla struttura spazio-temporale della Realtà Fisica?

- **La questione dell’interpretazione dello *SpazioTempo* Einsteiniano**

Rappresentiamo due *punti-evento*,  $(t_1; \mathbf{r}_1)$  e  $(t_2; \mathbf{r}_2)$ , con due quaterne *distinte* di coordinate dello *SpazioTempo*, evidenziando la coordinata temporale,  $t$ , dalla terna di posizioni spaziali,  $\mathbf{r} \equiv (x; y; z)$  associata:

$$\text{evento 1: } (t_1; \mathbf{r}_1) \equiv (t_1; x_1; y_1; z_1), \quad (7.1)$$

$$\text{evento 2: } (t_2; \mathbf{r}_2) \equiv (t_2; x_2; y_2; z_2), \quad (7.2)$$

Ipotizziamo che, *per noi*, l’evento 1 sia avvenuto *prima* dell’evento 2. Allora, matematicamente, si scrive

$$t_2 - t_1 > 0 \quad (7.3)$$

Un altro osservatore, in moto con velocità *relativa*  $v \hat{\mathbf{x}}$  costante (i.e., di verso  $\hat{\mathbf{x}}$  e di componente scalare  $v \geq 0$  *invarianti nel Tempo*) vs. il *nostro* sistema di coordinate, osserva gli *stessi* eventi registrandoli con le *sue proprie* coordinate, contraddistinte da *apici*,

$$\text{evento 1: } (t'_1; \mathbf{r}'_1) \equiv (t'_1; x'_1; y'_1; z'_1), \quad (8.1)$$

$$\text{evento 2: } (t'_2; \mathbf{r}'_2) \equiv (t'_2; x'_2; y'_2; z'_2), \quad (8.2)$$

Tali eventi corrispondono alle trasformazioni Lorentz-relativistiche *temporali* lungo l’asse *spaziale*  $X'$  ( $\parallel X$ ),

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right), \quad (9.1)$$

$$t'_2 = \gamma \left( t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right). \quad (9.2)$$

Nelle Eq.i (9.1) e (9.2),  $\gamma > 0$  è il *fattore di scala* già incontrato nell’Eq. (3), dipendente dal valore *istantaneo* osservato per  $v$  in  $v \hat{\mathbf{x}}$ . Si ricordi che la definizione di  $\gamma$  è:

$$\gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (9.3)$$

Sottraendo membro-a-membro l’Eq. (9.1) dall’Eq. (9.2), si ottiene la differenza tra gli *istanti* dei due eventi rilevati dall’osservatore in moto vs. il nostro sistema di coordinate:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left( t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) - \gamma \left( t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) = \gamma \left( t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right). \quad (10)$$

A questo punto, la matematica della Relatività costringe a porsi la domanda: che cosa accadrebbe se l’*osservatore in moto relativistico* registrasse che  $t'_2 - t'_1 < 0$ ? o, detto altrimenti con l’Eq. (10), se *noi* osservassimo che

$$t_2 - t_1 < \frac{v}{c} (x_2 - x_1), \quad (11.1)$$

i.e. (dando per scontato che la *freccia del Tempo*, per noi, punta verso il Futuro ( $\Rightarrow t_2 > t_1$ )), se osservassimo che

$$c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < v ? \quad (11.2)$$

La condizione imposta dalla Teoria della Relatività, fissa, *in ogni caso*, che sia  $|v| \leq c$ . Dunque, da

$$c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < |v| < c, \quad (11.3)$$

segue che

$$c(t_2 - t_1) < x_2 - x_1. \quad (11.4)$$

Il vincolo (11.4) dice che, nel *nostro* sistema di riferimento, la distanza spaziale  $x_2 - x_1$  tra i due eventi *può* essere maggiore della distanza percorsa dalla radiazione EM nel Vuoto (i.e., fotoni di velocità  $c$ ) nel tempo che intercorre tra i due eventi stessi e che, se gli eventi soddisfano questa particolare caratteristica, allora è possibile trovare un osservatore con una velocità  $v$  tale che  $t'_2 < t'_1$ , i.e., tale, *per l'osservatore in moto*, da *scambiare l'ordine di accadimento temporale degli eventi*! Questa *assurdità* (!) ammetterebbe la possibilità di esistenza dell'uovo prima di quella della gallina che lo depone, *contraddicendo il Principio di Causalità*.

Ma non c'è alcun problema! Infatti, *l'inversione temporale avviene solo per eventi che non possono essere connessi da alcuna relazione causale; non ci può essere trasporto di informazione tra eventi distanti, nello Spazio, più di quanto la luce percorra nell'intervallo di Tempo che li separa*, com'è implicito nella condizione (11.4).

Nella struttura matematica della Teoria della Relatività *Generale* (quindi, *anche* di quella *Ristretta*), è *possibile* che l'ordine temporale degli eventi appaia invertito *dal punto di vista di un osservatore in moto*.

Quindi? Cosa c'entrano nella Fisica gli eventi *privi di connessione causale*? L'intero impianto della Fisica non è forse basato sulla Causalità, pena questa insormontabile contraddizione ... meta-Fisica?

Qui interviene uno dei *principi fondanti* della Teoria Quantistica, sia *non-relativistica* che *relativistica*: il *Principio di Indeterminazione* di Heisenberg (K. W., 1901-1976). Una conseguenza di tale Principio è la *possibilità* che una particella si propaghi da un punto all'altro dello Spazio *anche quando questi due punti non sono correlati causalmente*. Se una particella viene emessa in un punto A ed assorbita in un punto B (e, per ipotesi, A e B *non sono* causalmente correlati), allora, un osservatore che si muove con una certa velocità  $v$ , Eq. (11.2), vedrebbe l'assorbimento della particella in B a un istante che *precede* quello di emissione in A. Come si esce da questa contraddizione?

#### • L'interpretazione di Stückelberg-Feynman

Tornando al prodotto tra i valori dell'Energia e del Tempo riguardanti l'evoluzione *temporale* di una particella libera, si era concluso che, se l'Energia è negativa, Eq. (6.2), segue l'implicazione *formale equivalente*

$$Et \Rightarrow (-E)t \equiv -Et \equiv E(-t). \quad (12)$$

In altre parole, può essere cambiato il segno di  $t$  invece che quello di  $E$ : formalmente, nulla appare diverso, ma il risultato *interpretativo* è davvero **dirompente**:

**Una particella libera di Energia *negativa* può essere pensata anche come una particella libera di Energia *positiva* che si muove con la *freccia del Tempo* che punta verso il *Passato*.**

Questo fu il punto di partenza di Stückelberg e di Feynman, i quali, si posero subito il problema di come cancellare definitivamente il concetto di *Energia negativa*. D'altra parte, nel contesto delle interazioni tra particelle libere (quasi-) puntiformi, la Teoria della Relatività *non esclude l'inversione temporale*, come si è discusso sopra.

Ma che senso ha questa propagazione indietro nel Tempo? stiamo scivolando ancora nella meta-Fisica? Infatti, si deve ragionare sul significato – dal punto di vista *fisico* – dell'*inversione temporale*.

#### • L'interpretazione dell'inversione temporale

Generalmente classifichiamo le particelle in base al *modo in cui esse si comportano nelle interazioni fondamentali*. In particolare, ci interessa studiarne la traiettoria in una regione in cui è presente un Campo Elettromagnetico, EM.

L'*accoppiamento* tra una particella e un Campo EM avviene mediante una grandezza specifica, la *Carica Elettrica*,  $q$ . E, poiché le grandezze fisiche, di per sé, *non dipendono dalla loro rappresentazione matematica*, sia essa *quantistica* e/o *relativistica*, allora, è lecito riscrivere l'Equazione di Schrödinger (1) per la particella libera usando entrambe le rappresentazioni, con il Tempo assunto nella forma di *Tempo proprio (proper Time)*,  $t \Rightarrow \tau := t/\gamma$ , un tecnicismo

relativistico – va ribadito – *ininfluente* sulle grandezze fisiche! Dunque, all'Eq. *quantistica* del moto (1) corrisponde la forma 4-tensoriale *relativistica*, e.g., quella *covariante*, della *forza di accoppiamento (elettromagnetico) interattivo*,

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{d\tau^2} = q \frac{d\mathbf{x}^\nu}{d\tau} \mathcal{E}_{\mu\nu}. \quad (13)$$

La forza elettromagnetica su una carica  $q$  modifica la traiettoria del suo *portatore massivo, accelerandolo*. Questo descrive traiettorie in una direzione e verso, in base al *segno* della carica  $q$ , che può essere *positivo* o *negativo*.

Tra tutti i simboli dell'equazione (13), concentriamoci solo sulla coordinata temporale (relativistica)  $\tau$ . Ci sono solo due termini che contengono  $\tau$  esplicitamente, ed entrambi sono denominatori,  $d\tau^2$  e  $d\tau$  (si ricordi, dall'Analisi, il simbolo sintetico  $d\tau^2 \equiv (d\tau)(d\tau)$ ). Se avviene l'inversione temporale  $d\tau \Rightarrow -d\tau$ , il denominatore *a sinistra*, un quadrato, *non cambia*; cambia, invece, il denominatore *a destra*, quello contenente il *tensor elettromagnetico*  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ :

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{(-d\tau)(-d\tau)} \equiv m \frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{d\tau^2} = q \frac{d\mathbf{x}^\nu}{(-d\tau)} \mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv (-q) \frac{d\mathbf{x}^\nu}{d\tau} \mathcal{E}_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Dunque, la freccia del Tempo continua a puntare verso il Futuro, mentre l'Eq. (14), ancora con  $m = \gamma m_0$ , è riferibile alla particella *equi-massiva* (dove, però,  $\gamma \equiv \gamma(v(\tau))$  di carica elettrica *opposta*, l'*anti-particella* associata.

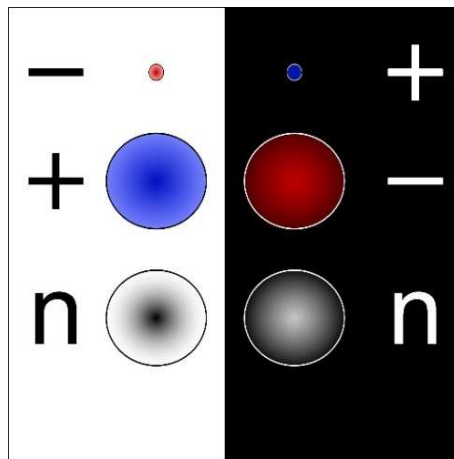
In sintesi, una particella di Energia *positiva* che appaia muoversi *indietro* nel Tempo è, *in realtà*, una particella di Energia *positiva*, con la *stessa* massa ma con *carica opposta*, che si muove *avanti* nel Tempo, i.e., verso il Futuro. Ne segue che, le particelle di Energia *negativa* sono interpretabili come particelle ad Energia *positiva* che si muovono *avanti* nel Tempo, anch'esse verso il Futuro, ma dotate di carica *opposta*. Detto altrimenti, una particella di Energia *negativa* è, semplicemente, un'*anti-particella* di Energia *positiva* che si muove, come ogni particella, *avanti* nel Tempo. differendo dalla *particella associata* solo per il segno della carica elettrica (e di altri *numeri quantici* ad essa connessi).

La scoperta *sperimentale* (1933) del *positrone* (Anderson, (C. D., 1905-1991)) aveva già posto le basi *sia* del quadro interpretativo teorico sia dell'ipotesi *più generale* dell'*esistenza dell'anti-Materia* (P. A. M. Dirac, 1931).

A completamento dell'intuizione del sempre *grandissimo* Feynman, è stato risolto anche il paradosso enunciato sopra:

si supponga di vedere una particella *emessa* in un punto A e *assorbita* in un punto B. Come dice la Relatività, un altro osservatore potrebbe, invece, vedere una particella *assorbita* in B in un istante che precede la sua *emissione* nel punto A (purché A e B *non siano correlati causalmente*). Ora, è evidente che ciò equivale a osservare una particella di carica *opposta* che viene *emessa* in B e *assorbita* in A.

Il Principio di Causalità – *intrinseco al Tempo!* – continua a valere nella Fisica che abbiamo scoperto e costruito nei millenni, cominciando dalle pratiche più semplici nella vita quotidiana. L'Universo Fisico che osserviamo, misuriamo e testiamo *sperimentalmente* miliardi di miliardi di miliardi di volte in ogni istante (più o meno direttamente e in modo incrociato), dalla pioggia che cade al funzionamento di un frullatore o di un microchip al collasso gravitazionale di una stella di neutroni, etc.), conferma ripetutamente, alla nostra *Conoscenza* e alle nostre azioni *conseguenti*, tutte fondate sull'*esperienza*, di essere una *struttura radiativo-materiale quanto-relativistica*. Per ora, ogni altra ipotesi resta a livello di congettura, magari rispettabile e suggestiva, ma in attesa di una falsificazione *sperimentale* definitiva e *inesorabile*. Altrimenti, si tratta solo di sciocchezze pseudo-poetiche e/o da cortigiani\santoni e pifferai da salotto.





## Appendice

### La rappresentazione covariante del Tensore EM (Elettromagnetico o di Maxwell)

A chi scrive, non pare inutile né banale sottolineare che la rappresentazione di modelli teorici *lineari* – purché consistenti con il controllo continuo e inesorabile di falsificazione sperimentale! – trovi ‘economico’ utilizzare metodi e strumenti matematici *lineari*. Ogni effetto fisico non-lineare viene, allora, declassato come *perturbativo* e approssimato mediante espansioni in serie arretrate al termine di *ordine superiore* sufficiente per una stima quantitativa coerente con il dato numerico fornito dall’apparato sperimentale.

Gli strumenti rappresentativi sono le *matrici*, i.e., sia i vettori elementari a  $n$ -componenti che, più in generale, loro raggruppamenti, con gli elementi *ordinati* disposti in tabelle  $m \times n$ , righe  $\times$  colonne, con  $\{m, n\} \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ .

Anche nella Fisica Classica (Elettrodinamica, Elasticità, Fluidodinamica, etc.), le matrici  $m \times n$  sono in grado di sintetizzare in modo adeguato comportamenti ed effetti *lineari interattivi coesistenti*, spesso, di natura molto complicata.

La bibliografia per un apprendimento efficace delle manipolazioni algebrico-analitiche *tensoriali* delle matrici è riportata a p. 6. Qui di seguito, è presentata la rappresentazione *relativistica covariante* del Tensore EM,  $\mathcal{E}_{mn}$ , in forma matriciale *anti-simmetrica* (*skew-symmetric*) esplicita  $4 \times 4$  in  $\mathcal{C}$ , (i.e.,  $a_{mn} = -a_{nm}$ ,  $\forall \{m, n\} \in \{1, 2, 3, 4\}$ ), nel SI di unità di misura:

$$\mathcal{E}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i\mathcal{E}_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -i\mathcal{E}_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -i\mathcal{E}_z/c \\ i\mathcal{E}_x/c & i\mathcal{E}_y/c & i\mathcal{E}_z/c & 0 \end{pmatrix},$$

una volta definito  $\mathbf{B}$  mediante il *potenziale-vettore* 3-dim  $\mathbf{A}$ , (i.e.,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) e le Trasformazioni di Lorentz delle Equazioni di Maxwell (J. C., 1831-1879). Tali trasformazioni – *lineari*! – sono ottenute definendo il *nuovo* potenziale-vettore 3-dim,

$$\mathbf{A}^\dagger := \mathbf{A} + \nabla \chi \equiv (A_x + \partial \chi / \partial x) \hat{x} + (A_y + \partial \chi / \partial y) \hat{y} + (A_z + \partial \chi / \partial z) \hat{z} \equiv A_x^\dagger \hat{x} + A_y^\dagger \hat{y} + A_z^\dagger \hat{z},$$

attraverso una *funzione di trasformazione* (di ‘*gauge*’)  $\chi \equiv \chi(\mathbf{r}, t)$  *appropriata*, la cui derivata temporale,  $\partial \chi / \partial t$ , fornisca la definizione della funzione potenziale *scalare* trasformata  $\phi^\dagger := \phi - \partial \chi / \partial t$ . Anche  $\phi$ , per garantire l’invarianza *formale* della trasformazione, deve soddisfare, come  $\phi$ , l’Equazione di Laplace,  $\nabla^2 \phi^\dagger = 0$ . In altri termini, la *differenza*  $\phi^\dagger - \phi \equiv$  *invariante spaziale* arbitraria e, quindi,  $\chi$  è una funzione *costante*, i.e., dipendente dalla *sola posizione*  $\mathbf{r}$  (nello spazio 3-dim).

Ora, appare logico chiedersi il motivo dell’introduzione della matrice  $4 \times 4$  rappresentativa di  $\mathcal{E}_{mn}$ . Nel suo ‘*A Treatise on Electricity and Magnetism*’, Maxwell, completando la formulazione della *Legge di Ampère* con la celebre ‘*corrente di spostamento*’,

$$I_d := \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \cdot \hat{n} dr^2 \equiv -\epsilon_0 \mu_0 \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{A}^\dagger}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dr^2.$$

generata dal *flusso*  $\mathbf{J}_d(\mathbf{r})$  di *cariche libere* nel *campo elettrico*  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  attraverso la *superficie gaussiano-vettoriale*  $d\mathbf{S} \equiv \hat{n} dr^2$ ,

$$\mathbf{J}_d := \sigma \mathcal{E} = \mu_0^{-1} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

(rappresentabile evidenziando o la *conduttività elettrica*  $\sigma$  del mezzo o la *permeabilità*  $\mu_0$  del Vuoto), aveva intuito chiaramente che la coordinata temporale  $t$  era essenziale nella rappresentazione unitaria dei fenomeni elettromagnetici mantenendo, però, i campi  $\mathcal{E}$  e  $\mathbf{B}$  separati e, sostanzialmente, *indipendenti tra loro*. Maxwell non poteva accorgersi che il suo quadro teorico era già *quantizzato* e *unificabile* attraverso  $\mathcal{E}_{mn}$ : Relatività e Fisica Quantistica erano ancora di là da venire!

Pertanto, oggidi possiamo generalizzare, nel ‘*gauge*’ di Lorentz, con  $c := (\epsilon_0, \mu_0)^{-1/2}$ , relazioni valide per *qualsiasi* mezzo, purché *omogeneo, isotropo, lineare e continuo*, quali, e.g.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z, i\phi/c) \Rightarrow (A_x^\dagger, A_y^\dagger, A_z^\dagger, i\phi^\dagger/c) \equiv \mathbf{A}^\dagger \\ \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \square^2 \phi^\dagger \equiv \square \cdot \square \phi^\dagger = 0 \\ \mathbf{B}^\dagger = \square \times \mathbf{A}^\dagger \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t) \times \mathbf{A}^\dagger \equiv \square \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \square^2 \mathbf{A}^\dagger + \mu \mathbf{J}_d^\dagger = \mathbf{0} \equiv (0, 0, 0, 0) \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Sarebbe auspicabile (secondo chi scrive) che, visti i rapidi avanzamenti e consolidamenti in atto nella Fisica moderna, le Equazioni di Maxwell venissero insegnate deducendole – *definitivamente* – da  $\mathcal{E}_{mn}$  e adattandole, poi, ai casi specifici nelle forme *ridotte* opportune. La chiamo: *consapevolezza sia formativa sia culturale* verso il Futuro.

**Bibliografia**

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [7], ne indica la versione PDF *contenuta* in un 7z-Archivio e scaricabile gratuitamente dalla pagina Biblioteca di questo web-site: [https://www.cm-physmath.net/libr\\_page.html](https://www.cm-physmath.net/libr_page.html).

Ben lontano dal ritenere questo elenco bibliografico esaustivo o fondamentale, lo propongo – a chi legge per iniziare a *praticare consapevolmente* – come un riferimento regolare possibile agli spazi *lineari* 3.dim e 4-dim e alle loro *rappresentazioni matriciali* rispettive. Ho trovato questi 'tools' *molto* utili. Sono contenuti nelle cartelle interne al 7z-Archivio 13.

- [1] Lang, S., *Linear Algebra*, 3<sup>rd</sup> ed., Springer (2004 corr. prin.);
- [2] Lipschutz, S. - Lipson, M. L., *Linear Algebra*, 4<sup>th</sup> ed. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (2009);
- [3] Spiegel, M. R. - Lipschutz, S. - Spellman, D., *Vector Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (2009);
- [4] Ayres, F., Jr., *Theory and Problems of MATRICES*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc. (1962);
- [5] Bronson, R., *Theory and Problems of MATRIX OPERATIONS*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc. (1989);
- [6] Lass, H., *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill Book Co. (1950);
- [7] Spain, B., *TENSOR CALCULUS - A Concise Course*, 3<sup>rd</sup> ed., Oliver & Boyd Ltd. (1960; 2003 Dover repr.);
- [8] Borisenko, A. I., - Tarapov, I. E., *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Prentice-Hall, Inc. (1968);
- [9] Sochi, T., *TENSOR CALCULUS*, a 2-PDF folder, arXiv:1603.01660v3 (2016);
- [10] Kay, D. C., *Theory and Problems of TENSOR CALCULUS*, Schaum's Outline Series, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill Book Co. (1988).

■■■